

OKG
Wittstein







Anfangsgründe

der

Analysis

und der

analytischen Geometrie

von

Dr. Theodor Wittstein,
Professor.

Erste Abtheilung: **Analysis.**

Hannover.
Hahn'sche Hofbuchhandlung.
1872.

Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

von

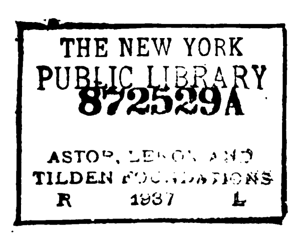
Dr. Theodor Wittstein,
Professor.

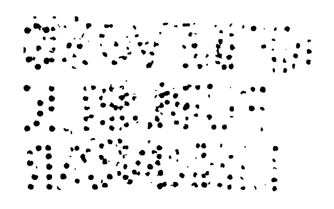
3

Dritter Band. Erste Abtheilung.

Analysis.

Hannover.
Hahn'sche Hofbuchhandlung.
1872.





Hannover. Schrift und Druck von Fr. Culemann.

Vorrede.

Das wachsende Bedürfniß unserer Schulen ist mir ein erfreulicher Anlaß gewesen, meinem in mehreren Auflagen bereits verbreiteten Lehrbuche der Elementar-Mathematik einen dritten Band nachfolgen zu lassen, welcher diesem Bedürfnisse entgegenzukommen bestimmt sein soll. Dieser dritte Band wird, gleich wie jeder der beiden ersten, wieder aus zwei getrennten Abtheilungen bestehen, von denen die vorliegende erste die Analysis enthält, die demnächst erscheinende zweite aber die Anfangsgründe der analytischen Geometrie, und zwar hauptsächlich eine elementare Behandlung der Kegelschnitte bringen wird. Was nun die Analysis insbesondere betrifft, so liegt es in der Natur der Sache, daß man in einem Buche der vorliegenden Art nichts anderes als eine sogenannte — oder so zu nennende — Schul-Analysis erwarten darf. Mit anderen Worten, es kam hier darauf an, solche Parthieen der Analysis auszuwählen, welche dem Schüler Beschäftigung geben und dessen Selbstthätigkeit herausfordern, dagegen alle diejenigen rein theoretischen Betrachtungen, welche nicht unmittelbar auf eine Anwendung hinausgehen und nur dem Mathematiker von Fach angehören, theils in den Hintergrund zu stellen und theils ganz auszuscheiden. Aus diesem Grunde wird man hier in einigen Beziehungen weniger, in anderen aber mehr finden, als in unseren wissenschaftlichen Werken über Analysis enthalten zu sein pflegt. In letzterer Beziehung nenne ich z. B. die Combinationslehre, die man sonst häufig schon in der niederen Arithmetik abgehandelt sieht, während sie hier erst eigentlich gebraucht wird, sowie die Zinseszins- und Rentenrechnung, die hier erst mit einem gewissen Grade der Erschöpfung behandelt werden kann. Nichts desto weniger war es daneben aber nothwendig, dieser

Schul=Analysis zugleich den vollen Charakter der Wissenschaft zu wahren. Dies ist meines Erachtens durch die im §. 1 vorangestellte Definition der Analysis geschehen, welche durch das ganze Buch vorherrscht und dessen Gang bestimmt. In Folge dieser Definition zerfällt die Analysis von selbst in zwei Theile, nämlich die Theorie der reellen Zahlen, welche im ersten Abschnitte, und die Theorie der complexen Zahlen, welche im neunten Abschnitte begründet wird, und alle übrigen Partheieen des Buches lehnen sich, wie es scheinen dürfte, auf eine naturgemäße und völlig ungezwungene Weise an diese beiden Ausgangspunkte. So bietet — um nur Eins zu erwähnen — der Eintritt der trigonometrischen Zahlen in die Analysis, der sonst so unmotivirt erscheint, gar nichts Fremdartiges mehr, sobald man denselben als bedingt durch die Natur der complexen Zahlen erkannt hat.

Ueber die Einzelheiten bemerke ich nur, daß der Wahrscheinlichkeitsrechnung hier ein größerer Raum, als sonst üblich, gewidmet worden ist, weil deren Lehren gegenwärtig immer mehr in das tägliche Leben eindringen und daselbst Geltung zu gewinnen anfangen, dagegen die Auflösung der höheren Gleichungen eine merkliche Zusammenziehung erfahren hat, ohne darum jedoch, wie ich hoffe, einer gewissen inneren Abrundung zu entbehren. Das Verfahren zur Auflösung der numerischen Gleichungen, welches man hier findet, dürfte sich gegenüber dem sonst üblichen durch seine Einfachheit empfehlen, da es in nichts als einer consequenten Durchführung der Betrachtung der Differenzreihen besteht. Im Uebrigen möge die Ausführung für sich selber reden, und empfehle ich das Buch einer wohlwollenden Beurtheilung von Seiten der Herren Collegen, welche das Glück haben, in der pädagogischen Praxis zu stehen.

Hannover, im October 1871.

Inhalt.

Analysis.

Analysis.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Darstellung der reellen Zahlen.

---

§. 1.

Erklärung. Die *Analysis* ist derjenige Theil der Arithmetik, welcher die Ausbildung der Lehre von den *irrationalen* und den *imaginären* Zahlen nebst den Anwendungen dieser Lehre zum Gegenstande hat.

Die Analysis ist demnach geradezu die Fortsetzung der niederen Arithmetik (oder Arithmetik im engeren Sinne) in das Gebiet der irrationalen und der imaginären Zahlen. Der Grund, weshalb man sie von dieser letzteren abzutrennen und durch eine besondere Benennung auszuzeichnen pflegt, liegt hauptsächlich darin, daß in ihr wesentlich neue Methoden zur Anwendung kommen, welche durch die allgemeinere Auffassung des Zahlenbegriffs bedingt werden.

Hier werden zunächst die irrationalen Zahlen betrachtet. Ueber die imaginären Zahlen s. d. IX. Abschnitt.

Anmerkung. Für die Analysis sind auch die besonderen Benennungen *niedere Analysis* oder *algebraische Analysis* im Gebrauch, indem man sie wie die Ueberleitung zur *höherer Analysis*, worunter die Differential- und Integralrechn[illegible] verstanden wird, ansieht.

Von den Grenzen.

§. 2.

Erklärung. Unter einer Grenze versteht man eine nachweisbare bestimmte Zahl, der man nach einem gewissen Gesetze immer näher, uud zwar so nahe wie man will, kommen kann, ohne sie jedoch genau zu erreichen.

Die successiven Werthe, welche der Grenze allmälig näher kommen, werden die Näherungswerthe derselben genannt.

Beispiele hierzu bietet schon die niedere Arithmetik, obwohl daselbst der Begriff der Grenze nicht üblich ist.

1) Die Verwandlung des Bruchs $\frac{1}{3}$ in einen Decimalbruch giebt bekanntlich 0,333 ... Betrachtet man nun die Reihe der Werthe

$$0{,}3 \quad 0{,}33 \quad 0{,}333 \quad \ldots.$$

so sieht man sofort, daß diese Werthe den Bruch $\frac{1}{3}$ zu ihrer Grenze haben. Denn von den hier aufgeführten Näherungswerthen weicht der erste um weniger als 0,1, der zweite um weniger als 0,01, der dritte um weniger als 0,001 2c. von dem Bruche $\frac{1}{3}$ ab, so daß man durch hinreichende Fortsetzung in dieser Reihe dem Bruche $\frac{1}{3}$ so nahe kommen kann wie man will, d. h. näher als irgend eine angebbare Zahl.

2) Die Ausziehung der Quadratwurzel aus 5 liefert auf dem gewöhnlichen Wege 2,236 ... Betrachtet man also die Reihe der Werthe

$$2 \quad 2{,}2 \quad 2{,}23 \quad 2{,}236 \quad \ldots.$$

so sieht man wie vorhin, daß diese Werthe, als Näherungswerthe, die Zahl $\sqrt{5}$ zu ihrer Grenze haben. Denn diese Zahl $\sqrt{5}$ ist eben sowohl wie vorhin der Bruch $\frac{1}{3}$ eine nachweisbare bestimmte Zahl in der continuirlichen Zahlenlinie, zu welcher man sich hier die ursprüngliche Zahlenreihe der Arithmetik erweitert denken muß (s. Arithm. § 191).

Aus diesen beiden Beispielen, welche dem Rechnen mit dekadischen Zahlen entnommen sind, läßt sich schon erkennen, daß eine Grenze eben sowohl rational als irrational sein kann. Die Grenze ist demnach eine geeignete Form, um die rationalen und die irrationalen Zahlen, d. h. also überhaupt die reellen Zahlen, unter eine

gemeinschaftliche Behandlung zusammenzufassen, und bildet deshalb hier den nächsten Hauptgegenstand der Betrachtung.

Ein Beispiel, welches von dem dekadischen Zahlensysteme unabhängig ist, ist das folgende:

3) Man betrachte die Reihe der Werthe

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \ldots .$$

welche aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$\frac{n+1}{n+2}$$

dadurch hervorgehen, daß man für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 ... an die Stelle setzt. Diese Werthe haben offenbar, als Näherungswerthe, zu ihrer Grenze die Zahl 1; denn der gedachte allgemeine Ausdruck des Näherungswerths weicht von der Zahl 1 nur um den Betrag $\frac{1}{n+2}$ ab, welcher, wenn n hinreichend groß genommen wird, auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit gebracht werden kann.

§. 3.

Erklärung. Eine Grenze wird bezeichnet, indem man dem allgemeinen Ausdrucke ihres Näherungswerths die Silbe lim vorsetzt.

Es sei S_n der allgemeine Ausdruck eines Näherungswerths, welcher, indem man darin für den allgemeinen Index n nach und nach die besonderen Werthe 0, 1, 2, 3 ... an die Stelle setzt, die successiven Näherungswerthe liefert

$$S_0 \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad \ldots .$$

Die Grenze dieser Werthe für wachsende Werthe von n wird sodann bezeichnet durch

$$\lim S_n.$$

Diese Bezeichnung setzt voraus, daß der allgemeine Ausdruck des Näherungswerths der Grenze gegeben sei. Sie kann demnach in den beiden ersten Beispielen des vorigen Paragraphen nicht angewandt werden; in dem dritten Beispiele dagegen kann man das dort gefundene Resultat ausdrücken durch die Gleichung

$$\lim \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Die Silbe lim ist die Abkürzung des Worts limes, Grenze.

Anmerkung 1. Die Bezeichnung lim S_n ist nur zulässig, so lange S_n wirklich den allgemeinen Ausdruck des Näherungswerthes einer Grenze bedeutet; denn im entgegengesetzten Falle findet der Begriff einer Grenze nicht statt. So stellt z. B. der Ausdruck

$$\lim (a^n)$$

nur dann eine Grenze dar, wenn $a < 1$ ist, und zwar hat man in diesem Falle sofort

$$\lim (a^n) = 0.$$

Denn mit wachsendem n wird a^n abnehmen und bis auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit hinabsinken. Dagegen für $a = 1$ ist jener Ausdruck nichts als eine umschriebene Bezeichnung der Zahl 1. Für $a = -1$ ist er unbestimmt und schwankt zwischen den beiden Werthen $+1$ und -1. Endlich für $a > 1$ wird a^n mit wachsendem n jede noch so große Zahl übersteigen, und mithin stellt der Ausdruck in diesem Falle eine unendlich große Zahl dar. In allen diesen Fällen ist die Erklärung §. 2 nicht anwendbar.

Anmerkung 2. Setzt man $n = \frac{1}{\alpha}$, so wird einem unendlichen Wachsen von n ein unendliches Abnehmen von α entsprechen. Man hat also in diesem Falle, statt einer Grenze für wachsende Werthe von n, eine Grenze für abnehmende Werthe von α. Von dieser Auffassung einer Grenze, die hier vorläufig nur erwähnt werden mag, wird unten gleichfalls Gebrauch gemacht werden.

§. 4.

Aufgabe. Eine unbekannte Grenze durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Der einfachste und natürlichste Weg, um eine unbekannte Grenze durch Rechnung zu finden, ergiebt sich aus der Erklärung der Grenze im Allgemeinen wie folgt:

Man gehe von einem gewissen, durch die Natur der vorgelegten Aufgabe gegebenen Werthe a_0 aus; addire dazu einen zweiten, gleichfalls aus der Natur der Aufgabe hervorgehenden Werth a_1; dazu ferner einen dritten aus der Natur der Aufgabe hervorgehenden Werth a_2 u. s. w. und setze dieses Verfahren unbegrenzt fort. Die Summe der so entstehenden unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots \text{ in infinitum}$$

wird die gesuchte Grenze sein.

Die Art, wie die Werthe a_0, a_1, a_2 ꝛc. zu bestimmen sind, muß im Allgemeinen der besonderen Natur des Falles überlassen bleiben.

Beispiel 1. Es sei für wachsende Werthe von n die Grenze zu suchen

$$\lim \frac{n+1}{n+2}$$

(s. Beispiel 3 in §. 2). Man gehe, indem man zuerst $n = 0$ setzt, von dem Werthe $\frac{1}{2}$ aus; addire dazu den Betrag $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3}$; dazu ferner den Betrag $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3 \cdot 4}$; dazu den Betrag $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4 \cdot 5}$ u. s. w. Die gesuchte Grenze wird sodann durch die Summe der unendlichen Reihe dargestellt werden

$$\lim \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{1.\ 2} + \frac{1}{2.\ 3} + \frac{1}{3.\ 4} + \frac{1}{4.\ 5} \ldots \text{ in inf.}$$

oder man muß haben, da in diesem Falle die Grenze bereits oben auf anderem Wege gefunden worden ist,

$$\frac{1}{1.\ 2} + \frac{1}{2.\ 3} + \frac{1}{3.\ 4} + \frac{1}{4.\ 5} \ldots \text{ in inf.} = 1.$$

Beispiel 2. Wenn man eine Reihe von Zahlen

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e, \text{ ꝛc.}$$

bildet, von denen die (beiden) ersten willkürlich angenommen werden, jede folgende aber gleich dem arithmetischen Mittel der beiden ihr vorhergehenden ist, d. h.

$$c = \frac{a+b}{2},\ d = \frac{b+c}{2},\ e = \frac{c+d}{2}, \text{ ꝛc.}$$

so kann man die Grenze, der diese Zahlen successive näher kommen, finden wie folgt. Man setze $b = a + x$, dann wird

$$c = a + x - \frac{x}{2}$$

$$d = a + x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$$

$$e = a + x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} \text{ ꝛc.}$$

folglich die gesuchte Grenze

$$= a + x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} + \ldots \text{ in inf.}$$

d. i. nach §. 173 der Arithmetik

$$= a + \frac{2}{3}\,x.$$

Andere Beispiele bieten alle unendlichen Decimalbrüche, welche aus der Verwandlung gewöhnlicher Brüche oder beim Wurzel=

ausziehen rc. entstehen und welche gleichfalls nichts anderes als unendliche Reihen sind.

In Folge der vorstehenden Auflösung erscheint als der einfachste und natürlichste Ausdruck einer Grenze die Summe einer unendlichen Reihe, und es sind demnach die Grenze und die Summe einer unendlichen Reihe correspondirende Begriffe, von denen jederzeit der eine für den andern muß an die Stelle gesetzt werden können. Es soll indessen hiermit nicht gesagt sein, daß eine Grenze immer nothwendig durch die Summe einer unendlichen Reihe ausgedrückt werden müsse. Denn theils lassen sich sehr häufig Grenzen ohne eine solche Hülfsform ermitteln (wie oben, wenn der allgemeine Ausdruck ihres Näherungswerths unmittelbar vorliegt), theils giebt es auch noch andere Hülfsformen, verschieden von der Summe einer unendlichen Reihe (z. B. den unendlichen Kettenbruch, s. d. VIII. Abschnitt), welche zur Darstellung von Grenzen geeignet sind. Dies bleibt jedoch hier vorläufig dahingestellt.

§. 5.

Zusatz. **Die Summe einer unendlichen Reihe ist jederzeit gleich der Grenze der Summe ihrer ersten n Glieder, diese Grenze für wachsende Werthe von n genommen.**

Oder wenn man das allgemeine Glied der Reihe a_0, a_1, a_2, a_3 ... mit a_n bezeichnet, so ist immer

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots$ in inf. $= \lim (a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1})$
diese Grenze für wachsende Werthe von n genommen.

Dies ergiebt sich sogleich aus dem Gange der vorigen Rechnung. Denn die successiven Näherungswerthe dieser Grenze sind

$$a_0$$
$$a_0 + a_1$$
$$a_0 + a_1 + a_2$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \text{ u. s. w.}$$

und mithin kann der allgemeine Ausdruck ihres Näherungswerths dargestellt werden durch

$$a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1},$$

woraus das Obige unmittelbar folgt.

Bezeichnet man die Summe einer unendlichen Reihe mit S und

die Summe ihrer ersten n Glieder mit S_n, so kann man statt der obigen Gleichung auch schreiben

$$S = \lim S_n.$$

In dem Beispiele 1 des vorigen Paragraphen hat man

$$a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

also

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \dots \text{ in inf.} = \lim \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

Von der Convergenz und Divergenz der Reihen.

§. 6.

Erklärung. Eine unendliche Reihe wird eine convergirende Reihe genannt, wenn die Summe ihrer n ersten Glieder für wachsende Werthe von n eine Grenze hat.

Sie wird dagegen eine divergirende Reihe genannt, wenn eine Grenze der Summe ihrer n ersten Glieder für wachsende Werthe von n nicht existirt.

Zur Convergenz der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \dots \text{ in inf.}$$

ist also erforderlich, daß die Grenze (§. 5)

$$\lim (a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_{n-1})$$

oder kürzer die Grenze

$$\lim S_n$$

für wachsende Werthe von n existirt, und diese Grenze ist sodann die Summe der in Rede stehenden unendlichen Reihe. Im entgegengesetzten Falle ist die Reihe divergirend und hat keine Summe.

Z. B. die Reihe (§. 4)

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} \dots \text{ in inf.}$$

ist eine convergirende Reihe. Denn die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe oder S_n beträgt $\frac{n}{n+1}$, und für wachsende n hat man $\lim \frac{n}{n+1} = 1$. Dieser Werth ist die Summe der Reihe.

Dagegen die Reihe der ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + 5 + 7 \dots \text{ in inf.}$$

ist eine divergirende Reihe. Denn die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe oder S_n beträgt n^2, und eine Grenze $\lim (n^2)$ für wachsende Werthe von n existirt nicht. Also hat diese Reihe auch keine Summe.

Man sieht hieraus, daß nur convergirende Reihen den Gegenstand der Betrachtungen der Analysis bilden können, divergirende Reihen dagegen bedeutungslos sind.

Auch folgt aus diesen Beispielen, wie einfach die Entscheidung über Convergenz oder Divergenz einer Reihe ausfällt, sobald die Summe ihrer n ersten Glieder in einem geschlossenen Ausdrucke vorliegt. Wo dies nicht der Fall ist, bedarf es anderer Hülfsmittel.

§. 7.

Zusatz. Eine Reihe ist gleichfalls eine convergirende Reihe, wenn die Summe aller ihrer Glieder, vom $n$ten Gliede an gerechnet, für wachsende Werthe von n die Grenze Null hat; und sie ist eine divergirende Reihe im entgegengesetzten Falle.

Oder die Convergenz der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots \text{ in inf.}$$

wird gleichfalls stattfinden, wenn für wachsende Werthe von n die Bedingung erfüllt ist

$$\lim (a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \ldots \text{ in inf.}) = 0.$$

Im entgegengesetzten Falle wird die Reihe divergiren.

Denn wenn man die in Rede stehende unendliche Reihe

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots \text{ in inf.}$$

in die beiden Theile zerlegt

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1}$$

$$T_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \ldots \text{ in inf.},$$

so hat man

$$S = S_n + T_n$$

und aus dieser Gleichung geht unmittelbar hervor, daß wenn $\lim T_n = 0$ ist, $\lim S_n = S$ sein wird, was der Bedingung des vorigen Paragraphen entspricht.

Der hier mit T_n bezeichnete Werth wird auch der Rest der Reihe genannt, und man kann also auch sagen: Eine Reihe convergirt,

wenn ihr Rest für wachsende n die Grenze Null hat, und sie divergirt im entgegengesetzten Falle.

Anmerkung. Aus der Bedingung $\lim T_n = 0$ folgt mit Nothwendigkeit $\lim a_n = 0$, d. h. in jeder convergirenden Reihe werden die Glieder mit wachsendem n ohne Grenzen kleiner werden. Aber nicht umgekehrt darf man aus dieser letzten Eigenschaft allein auf die Convergenz der Reihe schließen (s. d. Reihe §. 9).

§. 8.

Lehrsatz. Die geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 \ldots \text{ in inf.}$$

convergirt, wenn ihr Quotient q kleiner als Eins ist, und sie divergirt im entgegengesetzten Falle.

Beweis. Die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe ist

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 \ldots + q^{n-1}$$

und aus der Arithmetik ist bekannt, daß man diese Summe durch den geschlossenen Ausdruck darstellen kann

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Nimmt man nun 1) $q < 1$, so wird q^n, das einzige von n abhängige Glied dieses Ausdrucks, mit wachsendem n ohne Grenzen abnehmen oder $\lim (q^n) = 0$ sein; also hat man für wachsende n

$$\lim S_n = \frac{1}{1 - q}$$

d. h. die Reihe convergirt (§. 6) und die Summe derselben wird durch $\frac{1}{1-q}$ dargestellt. Man vergleiche Arithm. §. 173.

Nimmt man 2) $q = 1$, so geht der geschlossene Ausdruck für S_n in $\frac{0}{0}$ über, bleibt also unbestimmt. In diesem Falle stellt aber die Reihe selbst die Summe einer unendlichen Menge von Einen dar. Es giebt also für wachsende n keine Grenze $\lim S_n$, d. h. die Reihe divergirt.

Nimmt man 3) $q > 1$, so wird q^n mit wachsendem n ins Unendliche wachsen, folglich auch S_n unendlich groß werden. Es ist also ebenfalls keine Grenze $\lim S_n$ vorhanden, d. h. die Reihe divergirt.

§. 9.

Lehrsatz. Die harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \ldots\ldots \text{ in inf.},$$

deren allgemeines Glied $a_n = \frac{1}{n+1}$ ist, ist eine divergirende Reihe.

Beweis. Man betrachte den Rest der Reihe

$$T_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \ldots \text{ in inf.}$$

und zerlege denselben in folgende Theile

$$\begin{aligned} T_n = & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{2n} \\ & + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots \frac{1}{4n} \\ & + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} + \ldots \frac{1}{8n} \\ & + \ldots\ldots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Offenbar besteht in der hier geschriebenen Form die erste Reihe aus n Gliedern, von denen jedes mit Ausnahme des letzten $> \frac{1}{2n}$ und nur das letzte $= \frac{1}{2n}$ ist, also die Summe derselben $> \frac{1}{2}$. Ebenso besteht die zweite Reihe aus $2n$ Gliedern, von denen jedes mit Ausnahme des letzten $> \frac{1}{4n}$ und nur das letzte $= \frac{1}{4n}$ ist, also die Summe derselben gleichfalls $> \frac{1}{2}$. Ferner besteht die dritte Reihe aus $4n$ Gliedern, von denen jedes mit Ausnahme des letzten $> \frac{1}{8n}$ und nur das letzte $= \frac{1}{8n}$ ist, also die Summe derselben wiederum $> \frac{1}{2}$. Und so fort. Man hat also

$$T_n > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

d. h. eine Grenze $\lim T_n$ existirt nicht und die vorgelegte Reihe ist nach §. 7 eine divergirende Reihe.

Man vergleiche §. 7 Anm., indem hier offenbar die Bedingung $\lim a_n = 0$ für wachsende n erfüllt ist.

§. 10.

Lehrsatz. **Eine Reihe, deren Glieder ohne Grenzen abnehmen und deren Vorzeichen abwechseln, ist eine convergirende Reihe.**

Beweis. Die Reihe sei

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots . \text{ in inf.}$$

in welcher man für wachsende n hat $\lim a_n = 0$.

Man betrachte den Rest der Reihe, T_n, wobei man zu unterscheiden hat, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Im ersten Falle ist

$$T_n = a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} \ldots \text{ in inf.}$$

woraus folgt

$$T_n = a_n - (a_{n+1} - a_{n+2}) - (a_{n+3} - a_{n+4}) \ldots$$

$$\text{d. i. } T_n < a_n$$

und

$$T_n = a_n - a_{n+1} + (a_{n+2} - a_{n+3}) + (a_{n+4} - a_{n+5}) \ldots$$

$$\text{d. i. } T_n > a_n - a_{n+1}.$$

Läßt man nun n ohne Aufhören wachsen, so ist $\lim a_n = 0$ und folglich auch $\lim a_{n+1} = 0$. Es werden also beide Nachbarwerthe, zwischen denen hiernach T_n enthalten ist, ohne Aufhören näher an Null kommen, also muß auch $\lim T_n = 0$ sein.

Im zweiten Falle hat man

$$T_n = - a_n + a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} \ldots \text{ in inf.}$$

woraus wie oben folgt

$$T_n > - a_n$$

$$\text{und } T_n < - a_n + a_{n+1}$$

und hieraus erhält man durch denselben Schluß wie vorhin $\lim T_n = 0$.

Es ist also nach §. 7 die Reihe eine convergirende Reihe.

Beispiel. Während nach §. 9 die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \ldots \text{ in inf.}$$

divergirt, ist dieselbe Reihe, mit abwechselnden Vorzeichen genommen, das heißt

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \ldots \text{ in inf.}$$

nach dem vorstehenden Lehrsatze eine convergirende Reihe.

§. 11.

Lehrsatz. Wenn in der Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots \text{ in inf.}$$

der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für wachsende Werthe von n eine Grenze hat, so ist die Reihe convergirend, so oft (abgesehen vom Vorzeichen) $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ist; dagegen divergirend, so oft $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ist.

Beweis. 1) Es sei $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Da man, dem Begriffe einer Grenze gemäß, der Grenze nach und nach muß so nahe kommen können wie man will, so wird sich ein bestimmtes Glied der Reihe, a_n, angeben lassen, von welchem anfangend alle Quotienten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}, \ldots$$

kleiner als Eins sind. Es sei q irgend ein ächter Bruch, größer als jeder dieser Quotienten. Dann ist also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < q, \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < q, \ldots \frac{a_{n+r}}{a_{n+r-1}} < q, \ldots$$

woraus durch Multiplication weiter folgt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \frac{a_{n+2}}{a_n} < q^2, \frac{a_{n+3}}{a_n} < q^3, \ldots \frac{a_{n+r}}{a_n} < q^r, \ldots$$

Hieraus erhält man

$$a_{n+1} < a_n \cdot q$$
$$a_{n+2} < a_n \cdot q^2$$
$$a_{n+3} < a_n \cdot q^3$$
$$\ldots\ldots$$

folglich

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \ldots \text{ in inf.}$$
$$< a_n (1 + q + q^2 + q^3 \ldots \text{ in inf.})$$
$$\text{d. i.} < \frac{a_n}{1-q} \text{ nach §. 8.}$$

Nun ergiebt sich aus der Bedingung $\frac{a_{n+r}}{a_n} < q^r$, daß $a_{n+r} < a_n \cdot q^r$ ist, und da für wachsende r der Factor q^r und folglich

auch das Product $a_n\, q^r$ die Grenze Null hat, so wird für wachsende r auch $\lim a_{n+r} = 0$ oder, was dasselbe sagt, für wachsende n auch $\lim a_n = 0$ und mithin

$$\lim \frac{a_n}{1-q} = 0.$$

Demnach ist für wachsende n auch

$$\lim (a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \ldots \text{in inf.}) = 0$$

also nach §. 7 die Reihe convergirend.

2) Es sei $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. In ähnlicher Weise wie vorhin wird sich ein bestimmtes Glied der Reihe, a_n, angeben lassen, von welchem anfangend alle Quotienten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},\ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}},\ \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}},\ \ldots$$

größer als Eins sind. Es sei q irgend ein unächter Bruch, kleiner als jeder dieser Quotienten. Alsdann erhält man durch eine ähnliche Schlußfolge wie oben

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \ldots \text{in inf.} > a_n\,(1 + q + q^2 \ldots \text{in inf.})$$

und da hier für wachsende n die rechte Seite unendlich wächst, so wird dasselbe auch auf der linken Seite stattfinden, mithin nach §. 7 die Reihe divergiren.

Beispiel. Es sei die Reihe gegeben

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \ldots \text{in inf.}$$

Man hat

$$a_n = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n},\quad a_{n+1} = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n\,.\,(n+1)}$$

also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$$

und für wachsende n

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

mithin ist die Reihe eine convergirende.

Anmerkung 1. Der vorstehende Lehrsatz giebt keine Entscheidung über Convergenz oder Divergenz in demjenigen Falle, wo

man hat $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. In der That kann hier eben sowohl das Eine wie das Andere eintreten. So z. B. die Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \ldots \text{ in inf.}$$

giebt

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\ (n+2)}\ ,\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)\ (n+3)}$$

also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+3} \text{ d. i. } = 1 - \frac{2}{n+3}$$

und für wachsende n

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Diese Reihe ist nach §. 6 eine convergirende.

Dagegen die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \ldots \text{ in inf.}$$

giebt

$$a_n = \frac{1}{n+1}\ ,\ a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$$

also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \text{ d. i. } = 1 - \frac{1}{n+2}$$

und für wachsende n

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Diese Reihe ist nach §. 9 eine divergirende.

Anmerkung 2. Der Ausdruck im ersten Theile des Beweises

$$\frac{a_n}{1-q} = a_n + a_n q + a_n q^2 + \ldots \text{ in inf.}$$

welcher mehr beträgt als der Rest der Reihe

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \text{ in inf.}$$

kann häufig mit Vortheil gebraucht werden, um in numerischen Rechnungen über die Größe des weggelassenen Restes einer convergirenden Reihe sich ein Urtheil zu bilden.

§. 12.

Erklärung. Man sagt von einer Reihe, sie convergire mehr oder weniger rasch, je nachdem weniger oder mehr

Glieder erforderlich sind, um durch Rechnung den Werth ihrer Summe mit einem gegebenen Grade von Annäherung zu bestimmen.

Um über die mehr oder weniger rasche Convergenz einer Reihe urtheilen zu können, muß man einen genauen oder angenäherten Ausdruck des Restes der Reihe, T_n, haben und dessen Werthe mit wachsendem n betrachten; z. B.

1) Soll die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} \ldots \text{ in inf.}$$

deren Rest ist $T_n = \frac{1}{n+1}$ (vergl. §. 6), auf 4 genaue Decimalstellen berechnet werden, so muß man haben

$$T_n < 0{,}00005.$$

Dazu aber sind 20000 Glieder der Reihe erforderlich, oder die Reihe convergirt äußerst langsam.

2) Genau dasselbe gilt von der Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

denn hier ist, abgesehen vom Vorzeichen, $T_n < \frac{1}{n+1}$ (§. 10).

3) Soll die Summe der geometrischen Reihe

$$1 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{1000} \ldots \text{ in inf.}$$

deren Rest ist $T_n = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, ebenfalls auf 4 genaue Decimalstellen berechnet werden, so reichen schon 5 Glieder der Reihe aus, oder die Reihe convergirt sehr rasch.

4) Um von der Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

einen angenäherten Ausdruck des Restes zu bestimmen, hat man

$$T_n = \frac{1}{1.2..n} + \frac{1}{1.2..(n+1)} + \frac{1}{1.2..(n+2)} \ldots \text{ in inf.}$$

kann also setzen (vergl. §. 11 Anm. 2)

$$T_n < \frac{1}{1.2..n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \ldots \text{ in inf.}\right)$$
$$< \frac{1}{1.2..n} \cdot \frac{n}{n-1}$$
$$< \frac{1}{1.2..(n-1)} \cdot \frac{1}{n-1}$$

Soll die Summe dieser Reihe, wie vorhin, auf 4 genaue Decimalstellen berechnet werden, so folgt aus diesem Ausdrucke, daß dazu 8 Glieder der Reihe ausreichen.

Für den praktischen Gebrauch muß immer das Streben dahin gerichtet sein, Reihen herzustellen, welche möglichst rasch convergiren.

Von der Entwickelung in Reihen.

§. 13.

Erklärung. Eine Reihe heißt nach einer Hauptzahl geordnet, wenn die auf einander folgenden Glieder dieser Reihe die successiven Potenzen dieser Hauptzahl mit steigenden Exponenten enthalten.

Die mit den Potenzen der Hauptzahl verbundenen Factoren werden die Coefficienten der Reihe genannt.

Eine nach einer Hauptzahl geordnete Reihe hat allgemein die Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Die successiven Potenzen der Hauptzahl sind hier x^0, x^1, x^2, x^3 ꝛc. und die Coefficienten der Reihe sind a_0, a_1, a_2, a_3, ꝛc. Negative Exponenten bleiben ausgeschlossen.

Die Hauptzahl x muß angesehen werden wie beliebiger Werthe fähig, die nur an die Beschränkung gebunden sind, daß die Reihe eine convergirende bleiben muß. Die nach einer Hauptzahl geordnete Reihe ist demnach geeignet, die Probleme der Analysis in einer allgemeineren Weise zu lösen, als es durch die bis hieher betrachteten convergirenden Reihen möglich ist, welche jederzeit nur einen isolirten numerischen Werth darstellen.

Anmerkung. Man kann auch hier wie im §. 2 an die Zahlen des dekadischen Zahlensystems sich erinnern, welche gleichfalls wie

Reihen und nach einer Hauptzahl geordnet erscheinen, die hier die Grundzahl 10 ist. Nur fällt in diesem Beispiele die wesentliche Zusatzbestimmung fort, daß die Hauptzahl wie beliebiger Werthe fähig soll angesehen werden.

§. 14.

Lehrsatz. Eine nach einer Hauptzahl x geordnete Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots \text{in inf.}$$

in welcher, für wachsende n, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = h$ sei, ist convergirend für alle Werthe von x, welche zwischen $x = +\frac{1}{h}$ und $x = -\frac{1}{h}$ liegen; dagegen divergirend für alle Werthe von x, welche $> +\frac{1}{h}$ und $< -\frac{1}{h}$ sind.

Beweis. Wenn man den Lehrsatz §. 11 auf den hier vorliegenden Fall anwendet, so ergiebt sich, daß die Reihe convergirt, so oft (abgesehen vom Vorzeichen) $\lim \frac{a_{n+1} x}{a_n} < 1$ ist, dagegen divergirt, so oft $\lim \frac{a_{n+1} x}{a_n} > 1$ ist. Nun hat man nach der Voraussetzung für wachsende n

$$\lim \frac{a_{n+1} x}{a_n} = x \,.\, \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = hx.$$

Also wird die Reihe convergiren, so oft (abgesehen vom Vorzeichen) $hx < 1$, d. h. $x < \frac{1}{h}$ ist, dagegen divergiren, so oft $hx > 1$, d. h. $x > \frac{1}{h}$ ist. Mit Rücksicht auf das der Hauptzahl x zu ertheilende Vorzeichen kann man demnach auch sagen, daß die Reihe convergirt für alle Werthe von x, welche zwischen $+\frac{1}{h}$ und $-\frac{1}{h}$ liegen, und divergirt für alle Werthe von x, welche außerhalb dieser Schranken fallen.

Beispiele. 1) In der Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{4.5} \dots \text{in inf.}$$

hat man $k = 1$ (s. §. 11 Anmerkung 1). Also convergirt diese Reihe für alle Werthe von x zwischen $+ 1$ und $- 1$, und divergirt für alle Werthe von x, welche $> + 1$ und $< - 1$ sind.

2) In der Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots \text{ in inf.}$$

hat man $k = 0$ (s. §. 11), d. i. $\frac{1}{k} = \infty$. Also convergirt diese Reihe für alle möglichen reellen Werthe, die man für x setzen mag.

3) In der Reihe

$$1 + x + 1.2\,x^2 + 1.2.3\,x^3 + 1.2.3.4\,x^4 \ldots \text{ in inf.}$$

hat man $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n + 1$, mithin $k = \infty$, d. i. $\frac{1}{k} = 0$. Also convergirt diese Reihe nur für den Werth $x = 0$, in welchem Falle sie sich auf ihr erstes Glied reducirt, divergirt dagegen für alle von 0 verschiedenen Werthe von x.

Anmerkung. Für die Werthe $x = + \frac{1}{k}$ und $x = - \frac{1}{k}$ bleibt nach diesem Lehrsatze die Convergenz zweifelhaft, vergl. §. 11 Anmerkung 1. Indessen wird in solchen Fällen, selbst wenn die Reihe convergirt, die Convergenz nur eine so äußerst langsame sein, daß davon beinahe gar kein praktischer Gebrauch gemacht werden kann. Man sehe das Beispiel 1, welche Reihe sowohl für $x = + 1$ als auch für $x = - 1$ convergirt.

§. 15.

Lehrsatz. Wenn zwei nach einerlei Hauptzahl geordnete Reihen für alle Werthe dieser Hauptzahl, von Null angefangen bis zu irgend einem von Null verschiedenen Werthe derselben, gleiche Summen geben, so müssen jede zwei Coefficienten dieser Reihen, denen einerlei Stellenzahl zugehört, gleich groß sein.

Oder wenn für alle Werthe der Hauptzahl x, von $x = 0$ angefangen bis zu irgend einem von 0 verschiedenen Werthe von x die Gleichung besteht

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots \text{ in inf.} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \ldots \text{ in inf.}$$

so muß man haben

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 \text{ u. s. w.}$$

Beweis. Da die gegebene Gleichung für den Werth $x = 0$ bestehen soll, so hat man unmittelbar

$$1)\qquad a_0 = b_0$$

folglich auch für alle zulässigen Werthe von x

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots \text{in inf.}$$
$$= b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \ldots \text{in inf.}$$

und mithin

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \ldots \text{in inf.} = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 \ldots \text{in inf.}$$

Da diese Gleichung wieder für den Werth $x = 0$ bestehen soll, so hat man

$$2)\qquad a_1 = b_1$$

folglich auch für alle zulässigen Werthe von x

$$a_2 x + a_3 x^2 \ldots \text{in inf.} = b_2 x + b_3 x^2 \ldots \text{in inf.}$$

und mithin

$$a_2 + a_3 x \ldots \text{in inf.} = b_2 + b_3 x \ldots \text{in inf.}$$

Da diese Gleichung ebenfalls für den Werth $x = 0$ bestehen soll, so hat man weiter

$$3)\qquad a_2 = b_2$$

u. s. f. Man sieht leicht, wie man auf dieselbe Weise beliebig weiter schließen kann.

§. 16.

Aufgabe. Einen gegebenen, von x abhängigen Ausdruck in eine Reihe zu entwickeln, welche nach x als Hauptzahl geordnet ist.

Auflösung. Man setze den gegebenen Ausdruck gleich einer Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots . \text{ in inf.}$$

deren Coefficienten vorläufig unbestimmt gelassen werden, und suche hieraus durch entsprechende, aus der Natur des gegebenen Ausdrucks fließende Umformungen eine Gleichung herzustellen, welche auf jeder Seite des Gleichheitszeichens eine nach der Hauptzahl geordnete Reihe

enthält. Wendet man auf diese Gleichung den vorigen Lehrsatz an, so gelangt man schließlich zur Bestimmung der vorhin unbestimmt gebliebenen Coefficienten.

Hinterher bedarf es sodann noch einer besonderen Untersuchung, ob und für welche Werthe von x die gefundene Reihe convergirt (§. 14).

Das hier nach seinem allgemeinen Gange bezeichnete Verfahren führt den Namen der Methode der unbestimmten Coefficienten. Folgende Beispiele mögen zu einer vorläufigen Erläuterung desselben dienen.

Beispiele. 1) Es soll der Ausdruck

$$\frac{1 + 2x - x^2}{1 - x}$$

in eine nach x als Hauptzahl geordnete Reihe entwickelt werden. Man setze

$$\frac{1 + 2x - x^2}{1 - x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots \text{ in inf.}$$

Multiplicirt man mit $1 - x$, so folgt

$$1 + 2x - x^2 = a_0 + (a_1 - a_0)\,x + (a_2 - a_1)\,x^2 + (a_3 - a_2)\,x^3 \ldots$$

und daraus nach §. 15

$$\begin{array}{rcll} a_0 &=& 1 & \\ a_1 - a_0 &=& 2 & \text{woraus } a_1 = 3 \\ a_2 - a_1 &=& -1 & \quad\text{,,}\quad a_2 = 2 \\ a_3 - a_2 &=& 0 & \quad\text{,,}\quad a_3 = 2 \\ & \text{rc.} & & \qquad\quad \text{rc.} \end{array}$$

Also ist endlich

$$\frac{1 + 2x - x^2}{1 - x} = 1 + 3x + 2x^2 + 2x^3 \ldots \text{ in inf.}$$

Diese Reihe convergirt für alle Werthe von x, welche zwischen $x = +1$ und $x = -1$ enthalten sind.

Man kann bemerken, daß man zu demselben Resultate auch auf dem Wege der gewöhnlichen Division gelangt sein würde.

2) Es soll der Ausdruck

$$\sqrt{1 - x}$$

h x als Hauptzahl geordnete Reihe entwickelt werden.

$\overline{-x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots$ in inf.

zum Quadrat, so folgt

$a_0^2 + 2\, a_0\, a_1\, x + (a_1^2 + 2\, a_0\, a_2)\, x^2$

$a_2 + 2\, a_0\, a_3)\, x^3 + (a_2^2 + 2\, a_1\, a_3 + 2\, a_0\, a_4)\, x^4 \ldots$

nach §. 15

$$a_0^2 = 1 \quad \text{woraus} \quad a_0 = +1 \quad \text{oder} \quad -1$$
$$2\, a_0\, a_1 = -1 \quad \text{„} \quad a_1 = -\tfrac{1}{2} \quad \text{„} \quad +\tfrac{1}{2}$$
$$_1^2 + 2\, a_0\, a_2 = 0 \quad \text{„} \quad a_2 = -\tfrac{1}{8} \quad \text{„} \quad +\tfrac{1}{8}$$
$$a_2 + 2\, a_0\, a_3 = 0 \quad \text{„} \quad a_3 = -\tfrac{1}{16} \quad \text{„} \quad +\tfrac{1}{16}$$
$$a_2^2 + 2\, a_1\, a_3 + 2\, a_0\, a_4 = 0 \quad \text{„} \quad a_4 = -\tfrac{5}{128} \quad \text{„} \quad +\tfrac{5}{128}$$

ꝛc. ꝛc.

Also ist endlich

$$\sqrt{1-x} = \pm\left(1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 \ldots \text{in inf.}\right).$$

Zu demselben Resultate würde man auch auf dem Wege der gewöhnlichen Wurzelausziehung gelangt sein.

Ueber die Convergenz dieser Reihe kann hier nicht geurtheilt werden, weil durch die vorstehende Entwickelung das allgemeine Glied derselben sich nicht ergeben hat. Man sehe darüber den dritten Abschnitt.

§. 17.

Zusatz. Wenn ein gegebener, von x abhängiger Ausdruck auf verschiedenen Wegen in Reihen entwickelt worden ist, welche nach derselben Hauptzahl geordnet sind, so müssen diese Reihen identisch sein.

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus §. 15.

Anmerkung. Diejenigen Ausdrücke der Arithmetik, welche zuerst auf Irrationalzahlen führen, sind die Wurzeln (oder Potenzen mit Bruch-Exponenten) und die Logarithmen. Die nächste Aufgabe der Analysis wird deshalb darin zu bestehen haben, Ausdrücke dieser beiden Arten allgemein in unendliche Reihen zu entwickeln. Solches

geschieht im dritten und vierten Abschnitte, während der folgende zweite Abschnitt noch eine anderweitige Vorbereitung dazu giebt, die man sonst häufig auch schon in der niederen Arithmetik abgehandelt findet.

Zweiter Abschnitt.

Die Combinationslehre.

---

§. 18.

Erklärung. Die **Combinationslehre** hat die Aufgabe, aus gegebenen Dingen, welche **Elemente** genannt werden, in einer vorgeschriebenen Weise Zusammenstellungen zu bilden und die dabei eintretenden Gesetze nachzuweisen.

Jede Zusammenstellung von Elementen wird eine **Complexion** genannt.

Die Elemente werden nach der Reihefolge, in welcher sie gegeben sind, entweder durch Buchstaben *a*, *b*, *c*, ꝛc. oder durch Zahlen 1, 2, 3 ꝛc. bezeichnet. Diese letzte Bezeichnung hat den Vorzug, daß die Unterscheidung von *höheren* und *niedrigeren* Elementen (z. B. 2 ist höher als 1) und von *steigender Anordnung* (1 2) und *fallender Anordnung* (2 1) unmittelbar in der Bezeichnung ausgedrückt liegt.

Was die Elemente vorstellen, das bleibt vollkommen unbestimmt, gleichwie auch die Art ihrer Verbindung unter einander ganz dahingestellt gelassen wird. Davon kann erst in den Anwendungen die Rede sein. Wäre z. B. die Aufgabe vorgelegt: „Aus den drei Grundfarben Roth, Gelb, Blau alle möglichen Mischfarben zu [illegible]n“, so würde man diese drei gegebenen Elemente mit 1, 2, 3 [illegible] und daraus die Complexionen herstellen

1 2
1 3
2 3

womit auf abstractem Gebiete die Aufgabe gelöst ist. Mit Anwendung auf den vorliegenden besonderen Fall aber ergeben sich hieraus die Mischfarben

Roth-Gelb, d. i. Orange,
Roth-Blau, „ Violett,
Gelb-Blau, „ Grün.

Man unterscheidet in der Combinationslehre die folgenden drei Haupt-Operationen: Permutiren, Combiniren und Variiren.

Von den Permutationen.

§. 19.

Erklärung. Unter Permutiren versteht man diejenige combinatorische Operation, durch welche man aus gegebenen Elementen Complexionen bildet, deren jede 1) sämmtliche gegebene Elemente enthält und 2) sich von jeder anderen durch die Ordnung der darin enthaltenen Elemente unterscheidet.

Dabei können entweder sämmtliche gegebenen Elemente ungleich sein, wie z. B. 1, 2, 3, 4, 5; oder es können auch gleiche Elemente darunter vorkommen, wie z. B. 1, 2, 2, 3, 4.

§. 20.

Aufgabe. Aus gegebenen Elementen alle möglichen Permutationen zu bilden.

Auflösung. 1) Man setze als erste Complexion alle gegebenen Elemente in steigender Ordnung neben einander.

2) Um von irgend einer Complexion zu der nächstfolgenden fortzuschreiten, suche man in ihr das späteste Element auf, dem ein höheres folgt, erhöhe dasselbe so wenig wie möglich, und lasse darauf die noch übrigen Elemente in steigender Ordnung folgen.

3) Die letzte Complexion, zu der man auf diese Weise gelangt, wird alle gegebenen Elemente in fallender Ordnung enthalten.

Beispiele. Alle Permutationen aus den Elementen 1, 2 sind

12
21

desgleichen aus den Elementen 1, 2, 3

123	213	312
132	231	321

desgleichen aus den Elementen 1, 2, 3, 4

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Wenn unter den Elementen gleiche vorkommen, so ändert sich das Verfahren nicht wesentlich. Z. B. alle Permutationen aus den Elementen 1, 2, 2, 3 sind

1223	2123	2231	3122
1232	2132	2312	3212
1322	2213	2321	3221

Anmerkung. Die Permutation der Buchstaben eines Worts oder Satzes, welche wieder ein Wort oder einen Satz bildet, pflegt man ein Anagramm zu nennen. So ist Lied ein Anagramm von Leid u. a.

§. 21.

Lehrsatz. Die Anzahl aller Permutationen aus n ungleichen Elementen, welche mit $P(n)$ bezeichnet werden mag, beträgt

$$P(n) = 1.2.3.4 \ldots n.$$

Beweis. Aus zwei Elementen können 2 Permutationen gebildet werden.

Kommt dazu ein drittes Element, so kann man diesem in den vorhandenen Complexionen 3 verschiedene Stellen geben, nämlich:

voran, in der Mitte, und am Ende. Dadurch entstehen aus jeder der vorhandenen Complexionen 3 neue, also im Ganzen $2.3 = 6$ neue.

Kommt dazu ein viertes Element, so kann man diesem in den jetzt vorhandenen Complexionen 4 verschiedene Stellen geben, nämlich: voran, zwischen dem ersten und zweiten, zwischen dem zweiten und dritten Elemente, und am Ende. Dadurch entstehen aus jeder vorhandenen Complexion 4 neue, also im Ganzen $2.3.4 = 24$ neue.

So kann man weiter schließen und erhält allgemein aus n Elementen $1.2.3.4\ldots n$ Permutationen, wie oben behauptet wurde.

Die Zahl $1.2.3.4\ldots n$ pflegt man kurz die Permutationszahl von n zu nennen.

§. 22.

Lehrsatz. Die Anzahl aller Permutationen aus n Elementen, unter denen r unter sich gleiche Elemente vorkommen, beträgt

$$\frac{P(n)}{P(r)} = \frac{1.2.3.4\ldots n}{1.2.3\ldots r}.$$

Beweis. Die Permutationen seien sämmtlich gebildet und ihre Anzahl $= x$.

Nimmt man darauf die r gleichen Elemente als ungleich an, so kann man durch Permutirung derselben unter sich aus jeder vorhandenen Complexion $P(r)$ neue herleiten, erhält also im Ganzen $x\,P(r)$ neue Complexionen.

Diese Zahl muß aber dieselbe sein, als ob von Anfang an alle n Elemente ungleich gewesen wären. Man hat also die Gleichung

$$x\,.\,P(r) = P(n)$$

aus welcher folgt

$$x = \frac{P(n)}{P(r)} = \frac{1.2.3.4\ldots n}{1.2.3\ldots r}.$$

Beispiel. Die Anzahl aller Permutationen aus den Elementen 1, 2, 2, 2, 3, 4 beträgt

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3} = 120.$$

§. 23.

Zusatz. Die Anzahl aller Permutationen aus n Elementen, unter denen r gleiche Elemente einer Art und r' gleiche Elemente einer andern Art vorkommen, beträgt

$$\frac{P(n)}{P(r).\ P(r')} = \frac{1.2.3.4 \ldots n}{1.2.3 \ldots r.\ 1.2.3 \ldots r'}.$$

Dies ergiebt sich durch Fortsetzung der Betrachtung des vorigen Paragraphen und kann leicht auf den Fall ausgedehnt werden, wo beliebig viele Gruppen gleicher Elemente vorhanden sind.

Z. B. die Anzahl aller Permutationen aus den Elementen 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 beträgt

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.1.2.3.1.2} = 210.$$

Von den Combinationen.

§. 24.

Erklärung. Unter Combiniren versteht man diejenige combinatorische Operation, durch welche man aus gegebenen Elementen Complexionen bildet, deren jede 1) eine und dieselbe vorgeschriebene Anzahl von Elementen enthält und 2) sich von jeder andern durch die darin enthaltenen Elemente unterscheidet.

Die Classe der Combinationen bezeichnet die Anzahl der Elemente, welche jede Complexion enthalten soll.

Man bemerke, daß diese Erklärung über die Ordnung der Elemente in den einzelnen Complexionen nichts aussagt, dieselbe also für die Combinationen vollkommen gleichgültig ist. Oder jede zwei Complexionen, welche sich nur durch die Ordnung der darin enthaltenen Elemente von einander unterscheiden, haben, als Combinationen, für identisch zu gelten. Aus diesem Grunde hat man für zweckmäßig gefunden, festzustellen, daß beim Combiniren nur steigende Ordnung der Elemente in den Complexionen zugelassen werden, fallende Ordnung dagegen überall ausgeschlossen bleiben soll.

Anmerkung. Combinationen zu den Classen 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. führen auch die besonderen Namen: Unionen, Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen ꝛc.

§. 25.

Erklärung. **Man unterscheidet Combinationen ohne Wiederholung und Combinationen mit Wiederholung, je nachdem jedes Element in jeder Complexion nur einmal, oder beliebig oft wiederholt, vorkommen darf.**

Bei den Combinationen ohne Wiederholung kann die Classe höchstens der Anzahl der gegebenen Elemente gleich sein, bei den Combinationen mit Wiederholung dagegen ist sie unbeschränkt.

§. 26.

Aufgabe. **Aus gegebenen Elementen alle möglichen Combinationen ohne oder mit Wiederholung zu einer gegebenen Classe zu bilden.**

Auflösung. 1) Man setze als erste Complexion, bei Combinationen ohne Wiederholung, die niedrigsten der gegebenen Elemente in steigender Ordnung, dagegen bei Combinationen mit Wiederholung das niedrigste Element selbst so oft, wie der Classe gemäß ist.

2) Um von irgend einer Complexion zu der nächstfolgenden fortzuschreiten, suche man in ihr das späteste Element auf, welches einer Erhöhung fähig ist, setze dafür das nächsthöhere an die Stelle, und lasse, bei Combinationen ohne Wiederholung, die demnächst höheren Elemente in steigender Ordnung, dagegen bei Combinationen mit Wiederholung das gleiche Element so oft, wie zulässig, folgen.

3) Die letzte Complexion wird, bei Combinationen ohne Wiederholung, die höchsten der gegebenen Elemente in steigender Ordnung, dagegen bei Combinationen mit Wiederholung das höchste Element so oft enthalten, wie es der Classe entspricht.

Beispiele. Alle Combinationen ohne Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4 sind

Classe 1.	Classe 2.	Classe 3.	Classe 4.
1	1 2	1 2 3	1 2 3 4
2	1 3	1 2 4	
3	1 4	1 3 4	
4	2 3	2 3 4	
	2 4		
	3 4		

Dagegen alle Combinationen mit Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4 sind (Classe 1 wie vorhin)

Classe 2.	
1 1	2 3
1 2	2 4
1 3	3 3
1 4	3 4
2 2	4 4

Classe 3.			
1 1 1	1 2 3	2 2 2	2 4 4
1 1 2	1 2 4	2 2 3	3 3 3
1 1 3	1 3 3	2 2 4	3 3 4
1 1 4	1 3 4	2 3 3	3 4 4
1 2 2	1 4 4	2 3 4	4 4 4

u. s. w.

§. 27.

Lehrsatz. Die Anzahl aller Combinationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur Classe r, welche mit $C(n)_r$ bezeichnet werden möge, beträgt

$$C(n)_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}.$$

Beweis. Zur Classe 1 hat man aus n Elementen unmittelbar n Complexionen.

Um zur Classe 2 überzugehen, hänge man einer jeden dieser Complexionen jedes der Elemente an, welche in ihr nicht vorkommen. Dadurch entstehen aus jeder Complexion $n - 1$ neue, also im Ganzen $n(n-1)$ neue.

Um von da zur Classe 3 überzugehen, hänge man einer jeden dieser jetzt erhaltenen Complexionen jedes der Elemente an, welche in ihr nicht vorkommen. Dadurch werden aus jeder Complexion $n - 2$ neue, also im Ganzen $n(n-1)(n-2)$ neue.

Fährt man so weiter fort, so erhält man zur Classe r allgemein $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ Complexionen.

Unter diesen Complexionen sind aber alle diejenigen mitgezählt, welche sich nur durch Permutation der darin enthaltenen Elemente von einander unterscheiden. Soll also die Anzahl auf die eigentlichen Combinationen beschränkt bleiben, so fallen je $1.2.3\dots r$ Combinationen in eine einzige zusammen und man erhält

$$C(n)_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}$$

Beispiele. Die Anzahl aller Combinationen ohne Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4 beträgt

zur Classe 1. 4

" " 2. $\frac{4.3}{1.2} = 6$

" " 3. $\frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$

" " 4. $\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 1.$

Anmerkung. Man kann bemerken, daß die hier gefundene Anzahl der Combinationen identisch ist mit der Anzahl aller Permutationen aus n Elementen, unter denen r gleiche Elemente einer Art und $n - r$ gleiche Elemente einer andern Art vorhanden sind, s. §. 23. Denn der Ausdruck

$$\frac{P(n)}{P(r).\,P(n-r)} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}{1.2.3\ldots r.\,1.2.3\ldots(n-r)}$$

reducirt sich auf den obigen, wenn man in seinem Zähler und Nenner das gemeinschaftliche Product $1.2.3\ldots(n-r)$ wegläßt.

§. 28.

Lehrsatz. Die Anzahl aller Combinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur Classe r, welche mit $C'(n)_r$ bezeichnet werden möge, beträgt

$$C'(n)_r = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}$$

Beweis. Man denke sich die Combinationen vollständig gebildet. Erhöhet man sodann in jeder Complexion das zweite Element um 1, das dritte um 2, das vierte um 3 rc., so werden 1) alle Wiederholungen verschwinden, 2) die gegebenen Elemente um $r - 1$ neue vermehrt werden, und 3) die so entstandenen Combinationen ohne Wiederholung wieder in sich vollständig sein. Man hat also

$$C'(n)_r = C(n+r-1)_r$$

woraus der obige Ausdruck folgt.

So gehen z. B. auf die angedeutete Weise die Complexionen

		über in		
1 1 1 1	1 2 3 3		1 2 3 4	1 3 5 6
1 1 1 2	1 3 3 3		1 2 3 5	1 4 5 6
1 1 1 3	2 2 2 2		1 2 3 6	2 3 4 5
1 1 2 2	2 2 2 3		1 2 4 5	2 3 4 6
1 1 2 3	2 2 3 3		1 2 4 6	2 3 5 6
1 1 3 3	2 3 3 3		1 2 5 6	2 4 5 6
1 2 2 2	3 3 3 3		1 3 4 5	3 4 5 6
1 2 2 3			1 3 4 6	

und man hat $C'(3)_4 = C(6)_4 = 15$.

Von den Variationen.

§. 29.

Erklärung. Unter Variiren versteht man diejenige combinatorische Operation, durch welche man aus gegebenen Elementen Complexionen bildet, deren jede 1) eine und dieselbe vorgeschriebene Anzahl von Elementen enthält und 2) sich von jeder anderen sowohl durch die darin enthaltenen Elemente, als auch durch die Ordnung derselben unterscheidet.

Die Classe hat hier dieselbe Bedeutung wie bei den Combinationen, §. 24.

§. 30.

Erklärung. Man unterscheidet Variationen ohne Wiederholung und Variationen mit Wiederholung, je nachdem jedes Element in jeder Complexion nur einmal, oder beliebig oft wiederholt, vorkommen darf.

Diese Unterscheidung ist dieselbe wie bei den Combinationen, §. 25, und hat dieselbe Folge wie dort.

§. 31.

Aufgabe. Aus gegebenen Elementen alle möglichen Variationen ohne oder mit Wiederholung zu einer gegebenen Classe zu bilden.

Auflösung 1. Man verfahre nach §. 26, jedoch mit der Modification, daß hier auch niedere Elemente auf höhere folgen dürfen, also beim Fortschreiten von irgend einer Complexion zu der nächstfolgenden die Bestimmung des §. 20 maßgebend werden muß.

Auflösung 2. Man bilde nach §. 26 alle entsprechenden Combinationen aus den gegebenen Elementen zu der gegebenen Classe, und permutire darauf jede der entstandenen Complexionen so oft wie möglich.

Die zweite Auflösung wird sich von der ersten darin unterscheiden, daß die Complexionen hier in einer anderen Reihefolge erscheinen, als dort.

Beispiele. 1) Es seien Variationen ohne Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4 zur Classe 3 zu bilden. Die erste Auflösung giebt

*1 2 3	2 1 3	3 1 2	4 1 2
*1 2 4	2 1 4	3 1 4	4 1 3
1 3 2	2 3 1	3 2 1	4 2 1
*1 3 4	*2 3 4	3 2 4	4 2 3
1 4 2	2 4 1	3 4 1	4 3 1
1 4 3	2 4 3	3 4 2	4 3 2

Dagegen die zweite Auflösung giebt

*1 2 3	*1 2 4	*1 3 4	*2 3 4
1 3 2	1 4 2	1 4 3	2 4 3
2 1 3	2 1 4	3 1 4	3 2 4
2 3 1	2 4 1	3 4 1	3 4 2
3 1 2	4 1 2	4 1 3	4 2 3
3 2 1	4 2 1	4 3 1	4 3 2

2) Es seien Variationen mit Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4 zur Classe 2 zu bilden.

Nach Aufl. 1.

*1 1	2 1	3 1	4 1
*1 2	*2 2	3 2	4 2
*1 3	*2 3	*3 3	4 3
*1 4	*2 4	*3 4	*4 4

Nach Aufl. 2.

*1 1	3 1	*2 3	*3 3
*1 2	*1 4	3 2	*3 4
2 1	4 1	*2 4	4 3
*1 3	*2 2	4 2	*4 4

Die entsprechenden Combinationen sind hier überall durch vorgesetztes * bezeichnet.

§. 32.

Lehrsatz. Die Anzahl aller Variationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur Classe r, welche mit $V(n)_r$ bezeichnet werde, beträgt

$$V(n)_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).$$

Beweis. Man denke sich diese Variationen ohne Wiederholung dadurch gebildet, daß man zuerst alle Combinationen ohne Wiederholung aus den gegebenen Elementen zu der gegebenen Classe aufstellt und darauf jede der entstandenen Complexionen so oft wie möglich permutirt. Durch diese Permutirung entstehen aus jeder Complexion, da alle Elemente dieser Complexionen ungleich sind, $P(r)$ neue. Man erhält also

$$V(n)_r = P(r) \,.\, C(n)_r$$

und hieraus folgt, wenn man aus den §§. 21 und 27 die entsprechenden Werthe einsetzt, die obige Formel.

Wie man übrigens leicht sieht, ist diese Formel schon im §. 27 bewiesen. Denn man braucht in dem dort geführten Beweise nur den letzten Absatz wegzulassen, um einen Beweis für den hier aufgestellten Lehrsatz zu haben.

Beispiele. Die Anzahl aller Variationen ohne Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4 beträgt

zur	Classe	1.	4
"	"	2.	4. 3 = 12.
"	"	3.	4. 3. 2 = 24
"	"	4.	4. 3. 2. 1 = 24.

§. 33.

Lehrsatz. Die Anzahl aller Variationen mit Wiederholung aus n Elementen zur Classe r, welche mit $V'(n)_r$ bezeichnet werden möge, beträgt

$$V'(n)_r = n^r.$$

Beweis. Zur Classe 1 hat man aus n Elementen unmittelbar n Complexionen.

Um zur Classe 2 überzugehen, hänge man einer jeden dieser Com-

plexionen jedes der gegebenen Elemente an. Dadurch entstehen aus jeder Complexion n neue, also im Ganzen $n \, . \, n = n^2$ neue.

Um ferner zur Classe 3 überzugehen, hänge man einer jeden dieser jetzt erhaltenen Complexionen wieder jedes der gegebenen Elemente an. Dadurch werden aus jeder Complexion wieder n neue, also im Ganzen $n^2 \, . \, n = n^3$ neue.

Fährt man so weiter fort, so erhält man zur Classe r allgemein n^r Complexionen.

Beispiele. Die Anzahl aller Variationen mit Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4 beträgt

zur Classe	1.	4
" "	2.	$4^2 = 16$
" "	3.	$4^3 = 64$ u. s. w.

Anmerkung. Wollte man die Anzahl der Variationen mit Wiederholung aus derjenigen der Combinationen mit Wiederholung herleiten, in ähnlicher Weise, wie es im vorigen Paragraphen in Bezug auf die Variationen ohne Wiederholung geschehen ist, so würde die Schwierigkeit eintreten, daß nicht alle Complexionen einerlei Permutationszahl erhalten, und damit der Beweis ohne Vergleich umständlicher werden.

Vom binomischen Lehrsatze.

§. 34.

Der binomische Lehrsatz. Wenn man das Binomium $a + b$ mit einem Exponenten m, der eine absolute ganze Zahl ist, potenzirt, so erhält man

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\, a^{m-2} b^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, a^{m-3} b^3 + \ldots\ldots + b^m.$$

Beweis. Wenn man die Potenz $(a+b)^m$ durch successive Multiplication aus $a+b$ mal $a+b$ mal $a+b$ 2c. entstehen läßt, so ist leicht zu erkennen, daß die Einzelproducte, durch deren Summe das vollständige Product dargestellt wird, genau auf die-

selbe Weise sich bilden, wie die Variationen mit Wiederholung aus 2 Elementen zur Classe m.

Denn bezeichnet man die Elemente a, b mit 1, 2, so sind aus diesen Elementen die Variationen zur Classe 1:

1	d. i.	a	deren Summe $= (a + b)^1$;
2	„	b	

ferner die Variationen mit Wiederholung zur Classe 2:

1 1	d. i.	$a\ a$	deren Summe $= (a + b)^2$;
1 2	„	$a\ b$	
2 1	„	$b\ a$	
2 2	„	$b\ b$	

ferner zur Classe 3:

1 1 1	d. i.	$a\ a\ a$	deren Summe $= (a + b)^3$;
1 1 2	„	$a\ a\ b$	
1 2 1	„	$a\ b\ a$	
1 2 2	„	$a\ b\ b$	
2 1 1	„	$b\ a\ a$	
2 1 2	„	$b\ a\ b$	
2 2 1	„	$b\ b\ a$	
2 2 2	„	$b\ b\ b$	

u. s. w., woraus leicht zu schließen ist, wie dies für jeden beliebigen Exponenten m fortgesetzt werden kann.

Nun lassen sich nach §. 31 die Variationen mit Wiederholung auch dadurch herstellen, daß man die Combinationen mit Wiederholung aus den gegebenen Elementen zu der gegebenen Classe bildet und jede derselben so oft wie möglich permutirt.

Diese Combinationen aus den Elementen 1, 2 zur Classe m sind

1 ... (m mal)	d. i.	a^m
1 ... ($m - 1$ mal) und 2 ... (1 mal)	„	$a^{m-1}\,b$
1 ... ($m - 2$ mal) und 2 ... (2 mal)	„	$a^{m-2}\,b^2$
1 ... ($m - 3$ mal) und 2 ... (3 mal)	„	$a^{m-3}\,b^3$
. . . .		
bis 2 ... (m mal)	„	b^m

und nach den §§. 22 und 23 können diese Complexionen permutirt werden

$$a^m \ \ldots \quad 1 \text{ mal}$$

$$a^{m-1}b \ \ldots \quad \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1)} = m \text{ mal}$$

$$a^{m-2}b^2 \ \ldots \quad \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-2).1.2} = \frac{m(m-1)}{1.2} \text{ mal}$$

$$a^{m-3}b^3 \ \ldots \quad \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots(m-3).1.2.3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \text{ mal}$$

u. s. w.

Bildet man von allen so entstehenden Complexionen die Summe, so erhält man die in dem obigen Lehrsatze aufgestellte Gleichung.

Im Laufe dieses Beweises ist nicht ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht worden, daß jede Zusammenstellung der Elemente a, b zu einer Complexion eine Multiplication bedeutet, wie es zufällig mit der üblichen Bezeichnungsweise übereinstimmt; aber man muß sich dieses Umstandes im ganzen Beweise fortwährend wohl bewußt bleiben.

Besondere Fälle dieses Lehrsatzes sehe man §. 187 der Arithmetik.

Anmerkung. Nach Analogie des hier bewiesenen binomischen Lehrsatzes läßt sich auch ein polynomischer Lehrsatz aufstellen, welcher die Entwickelung der Potenz eines Polynomii

$$(a + b + c + d \ldots.)^m$$

auf Variationen mit Wiederholung aus so viel Elementen, wie das Polynomium $a + b + c + d\ldots$ Glieder hat, zur Classe m zurückführt. Aber dieser Lehrsatz läßt sich nicht durch eine so allgemeine Formel ausdrücken wie der obige; auch findet er nur wenig Anwendung.

§. 35.

Erklärung. Die Coefficienten der Entwickelung der Potenz $(a + b)^m$, nämlich

$$1\,,\ m\,,\ \frac{m(m-1)}{1.2}\,,\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,,\ \text{u. s. w.}$$

werden die **Binomial-Coefficienten** genannt.

Man zählt die Binomial-Coefficienten der Reihe nach durch die Indices 0, 1, 2, 3 u. s. w., indem man dem ersten Binomial-Coefficienten 1 den Index 0 giebt. Der letzte Binomial-Coefficient,

welcher wieder 1 ist, erhält also den Index m und die Anzahl aller Binomial-Coefficienten beträgt $m + 1$.

Zur Abkürzung bezeichnet man auch wohl die Binomial-Coefficienten der $m$ten Potenz der Reihe nach durch

$$(m)_0\,,\quad (m)_1\,,\quad (m)_2\,,\quad (m)_3 \quad \text{u. s. w.}$$

so daß der vorige Lehrsatz ausgedrückt wird durch die Gleichung

$$(a + b)^m = (m)_0\, a^m + (m)_1\, a^{m-1}\, b + (m)_2\, a^{m-2}\, b^2 + (m)_3\, a^{m-3}\, b^3 + \ldots\ldots + (m)_m\, b^m$$

wo man also hat

$$(m)_0 = 1$$

$$(m)_1 = m$$

$$(m)_2 = \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}$$

$$(m)_3 = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$(m)_m = 1.$$

Allgemein ist der Binomial-Coefficient der $m$ten Potenz vom Index r

$$(m)_r = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}$$

Anmerkung. Man kann bemerken, daß $(m)_r$ identisch mit $C(m)_r$ ist (siehe §. 27) und deshalb alle Lehrsätze über Binomial-Coefficienten zugleich Lehrsätze über Combinationen sind.

§. 36.

Lehrsatz. Die Summe aller Binomial-Coefficienten der $m$ten Potenz ist $= 2^m$.

Oder es ist

$$2^m = 1 + m + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2} + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + 1.$$

Der Beweis ergiebt sich leicht, wenn man überlegt, daß nach dem im §. 34 geführten Beweise diese Summe nichts anderes ist als die Anzahl der Variationen mit Wiederholung aus 2 Elementen zur Classe m, also $= 2^m$ (s. §. 33).

Noch kürzer kann man den Beweis führen, indem man in der Entwickelung von $(a+b)^m$ sowohl $a=1$ als auch $b=1$ setzt, wodurch diese Entwickelung in $(1+1)^m = 2^m$ übergeht.

Anmerkung. Einen ähnlichen Satz erhält man, wenn man in der Entwickelung von $(a+b)^m$ substituirt $a=1$ und $b=-1$, wodurch dieselbe in $(1-1)^m = 0$ übergeht. Dann hat man

$$1 - m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots = 0$$

wofür man auch schreiben kann

$$1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \ldots = m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

d. h. die Summe aller Binomial-Coefficienten mit geradem Index, in irgend einer Potenz genommen, ist gleich der Summe aller mit ungeradem Index, also jede derselben $= 2^{m-1}$.

§. 37.

Lehrsatz. Jede zwei Binomial-Coefficienten irgend einer Potenz, welche gleichweit vom Anfange und Ende der Reihe dieser Coefficienten abstehen, sind gleich groß.

Oder in Buchstaben

$$(m)_r = (m)_{m-r}.$$

Beweis. Man setze für diese beiden Binomial-Coefficienten ihre Werthe, nämlich

$$(m)_r = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r}$$

und indem man hierin $m-r$ statt r substituirt

$$(m)_{m-r} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-r)}.$$

Sollen diese beiden Brüche verglichen werden, so multiplicire man Zähler und Nenner eines jeden mit dem Nenner des anderen. Alsdann erscheint in jedem der beiden Zähler das Product aller ganzen Zahlen von 1 bis m; also sind beide Coefficienten gleich groß.

Man kann noch bemerken, daß die Binomial-Coefficienten einer jeden Potenz bis zur Mitte der Reihe dieser Coefficienten wachsen und von da wieder abnehmen.

Ferner wenn m gerade ist, so giebt es einen mittleren Binomial-Coefficienten; dagegen wenn m ungerade ist, zwei mittlere Binomial-Coefficienten. Jener mittlere und diese beiden mittleren Binomial-Coefficienten sind größer als alle vorhergehenden und nachfolgenden Coefficienten derselben Potenz.

§. 38.

Lehrsatz. Wenn man zu irgend einem Binomial-Coefficienten irgend einer Potenz den nächstvorhergehenden Binomial-Coefficienten derselben Potenz addirt, so erhält man den Binomial-Coefficienten der nächsthöheren Potenz von demselben Index, wie der erste.

Oder in Buchstaben

$$(m+1)_r = (m)_r + (m)_{r-1}.$$

Beweis. Man setze für diese drei Binomial-Coefficienten ihre Werthe, nämlich:

$$(m)_r = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}$$

und indem man hierin $r-1$ statt r substituirt

$$(m)_{r-1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(r-1)}$$

und indem man ebendaselbst $m+1$ statt m substituirt

$$(m+1)_r = \frac{(m+1)\,m\,(m-1)\ldots(m-r+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}.$$

Um die beiden ersten Ausdrücke zu addiren, kann man sie auf die Formen bringen

$$(m)_r = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(r-1)}\cdot\frac{m-r+1}{r}$$

$$(m)_{r-1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(r-1)}\cdot\frac{r}{r}$$

Hieraus folgt durch Addition

$$(m)_r + (m)_{r-1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(r-1)}\cdot\frac{m+1}{r}$$

und dieser Ausdruck ist genau identisch mit dem oben geschriebenen Ausdrucke für $(m+1)_r$.

Beiläufig mag bemerkt werden, daß die Richtigkeit dieses Lehrsatzes auch schon aus §. 187 der Arithmetik aus der Art und Weise, wie dort die Potenzen eines Binomii durch successive Multiplication gebildet werden, erkannt werden kann.

Vermöge dieses Lehrsatzes ist es leicht, durch bloße Addition aus den Binomial-Coefficienten irgend einer Potenz sämmtliche Binomial-Coefficienten der nächsthöheren Potenz herzuleiten. Schreitet man mit diesem Verfahren von der ersten Potenz zur zweiten, von dieser zur dritten u. s. w. fort, so erhält man die folgende Tabelle, welche durch Addition beliebig weit fortgesetzt werden kann.

Tabelle der Binomial-Coefficienten.

Exponenten	Indices												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz kann auf mehr als eine Art erweitert werden. Abgesehen von den beiden leicht nachweisbaren Gleichungen

$$(m+1)_r = (m)_{r-1} + (m-1)_{r-1} + (m-2)_{r-1} + \ldots + 1$$

$$(m+1)_r = (m)_r + (m-1)_{r-1} + (m-2)_{r-2} + \ldots + 1$$

welche durch fortgesetzte Anwendung des Lehrsatzes sich ergeben und

an der vorstehenden Tabelle leicht illustrirt werden können, möge hier noch der folgende Fall besondere Erwähnung finden.

Wenn man das für $(m+1)_r$ bewiesene Gesetz ferner auf $(m+2)_r$, $(m+3)_r$ 2c. anwendet, so erhält man nach und nach

$$\begin{aligned}
(m+2)_r &= (m+1)_r + (m+1)_{r-1} \\
&= (m)_r + (m)_{r-1} \\
&\qquad\; + (m)_{r-1} + (m)_{r-2} \\
&= (m)_r + 2\,(m)_{r-1} + (m)_{r-2}. \\
(m+3)_r &= (m+2)_r + (m+2)_{r-1} \\
&= (m)_r + 2\,(m)_{r-1} + (m)_{r-2} \\
&\qquad\; + (m)_{r-1} + 2\,(m)_{r-2} + (m)_{r-3} \\
&= (m)_r + 3\,(m)_{r-1} + 3\,(m)_{r-2} + (m)_{r-3}.
\end{aligned}$$

u. s. w.

Hier kehrt, wie man sieht, dasselbe Gesetz wieder wie bei der Bildung der successiven Potenzen eines Binomii, und man kann deshalb ohne Weiteres schreiben

$$(m+n)_r = (m)_r + (m)_{r-1}(n)_1 + (m)_{r-2}(n)_2 + (m)_{r-3}(n)_3 + \ldots (n)_r.$$

Da, wie sich im folgenden Abschnitte zeigen wird, die Bildung der Binomial-Coefficienten bei negativen und gebrochenen Exponenten unverändert dieselbe bleibt wie oben, so gilt auch diese letzte Gleichung noch dann, wenn m und n negative ganze Zahlen oder Brüche sind.

Dritter Abschnitt.

Entwickelung der Binomialreihe.

---

§. 39.

Erklärung. Unter der Binomialreihe versteht man diejenige unendliche Reihe, welche durch die Entwickelung

der Potenz $(1+x)^m$ nach der Hauptzahl x entsteht, wenn m eine beliebige reelle Zahl ist.

Im §. 34 wurde schon unter dem Namen des binomischen Lehrsatzes die Entwickelung einer Potenz $(a+b)^m$ gegeben, jedoch nur unter der Beschränkung, daß der Exponent m eine absolute ganze Zahl sei. Auch ist die daselbst erhaltene Reihe keine unendliche, sondern eine geschlossene, wie es der Natur der dortigen Ableitung entspricht. Diesen Lehrsatz dahin zu verallgemeinern, daß die gedachte Beschränkung wegfällt, ist der Zweck der hier anzustellenden Untersuchung.

§. 40.

Lehrsatz. Es ist für unendlich abnehmende Werthe von δ

$$\lim \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} = n$$

wo n eine beliebige reelle Zahl bedeutet.

Beweis. 1) Es sei n eine absolute ganze Zahl. Dann erhält man durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes §. 34

$$(1+\delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\delta^3 + \ldots \delta^n$$

folglich

$$\frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} = n + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\delta^2 + \ldots \delta^{n-1}.$$

Läßt man hierin δ unendlich abnehmen, so verschwinden auf der rechten Seite der Gleichung alle Glieder mit Ausnahme des ersten, und man erhält also

$$\lim \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} = n.$$

2) Es sei n eine negative ganze Zahl $= -r$. Dann giebt eine einfache Umformung

$$\frac{(1+\delta)^{-r} - 1}{\delta} = -\frac{(1+\delta)^r - 1}{\delta} \cdot \frac{1}{(1+\delta)^r}$$

also wird, wenn δ unendlich abnimmt, mit Benutzung des unter 1) gefundenen Resultats

$$\lim \frac{(1+\delta)^{-r}-1}{\delta} = -r.$$

3) Es sei n ein Bruch $= \frac{p}{q}$. Man setze

$$(1+\delta)^{\frac{1}{q}} = 1 + \varepsilon$$

also

$$\delta = (1+\varepsilon)^q - 1$$

wo ε eine zugleich mit δ unendlich abnehmende Zahl bedeutet. Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta} = \frac{(1+\varepsilon)^p - 1}{(1+\varepsilon)^q - 1}$$

$$\text{d. i.} = \frac{\dfrac{(1+\varepsilon)^p - 1}{\varepsilon}}{\dfrac{(1+\varepsilon)^q - 1}{\varepsilon}}$$

und wenn man δ und folglich auch ε unendlich abnehmen läßt und dabei auf der rechten Seite dieser Gleichung im Zähler und Nenner das in 1) gefundene Resultat benutzt, so folgt

$$\lim \frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta} = \frac{p}{q}.$$

§. 41.

Lehrsatz. Es ist für unendlich abnehmende Werthe der Differenz $y - x$

$$\lim \frac{y^n - x^n}{y - x} = n x^{n-1}$$

wo n eine beliebige reelle Zahl bedeutet.

Beweis. Man setze $y = x(1+\delta)$, wo δ eine unendlich abnehmende Zahl bedeutet. Dann hat man

$$\frac{y^n - x^n}{y - x} = \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} \cdot x^{n-1}$$

folglich nach dem vorigen Paragraphen, wenn $y-x$ und also auch δ unendlich abnimmt

$$\lim \frac{y^n - x^n}{y-x} = n x^{n-1}.$$

Anmerkung. Dieser Lehrsatz kann auch selbständig, ohne Zurückführung auf §. 40, bewiesen werden, wobei man wie dort zu unterscheiden hat, ob n eine absolute ganze Zahl, eine negative ganze Zahl oder ein Bruch ist. Dies wird jedoch hier nicht weiter ausgeführt.

§. 42.

Lehrsatz. Die Entwickelung der Potenz $(1+x)^m$, wo m eine beliebige reelle Zahl bedeutet, giebt folgende Reihe

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Diese Reihe ist die Binomialreihe.

Beweis. Man wende das im §. 16 beschriebene Verfahren an und setze den gegebenen Ausdruck gleich einer Reihe mit vorläufig unbestimmten Coefficienten

$$(1+x)^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad (1.)$$

Dann ist auch, indem y statt x gesetzt wird

$$(1+y)^m = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots$$

folglich

$$(1+y)^m - (1+x)^m = a_1(y-x) + a_2(y^2 - x^2) + a_3(y^3 - x^3) + \ldots$$

und wenn man diese Gleichung durch $(1+y)-(1+x) = y-x$ dividirt

$$\frac{(1+y)^m - (1+x)^m}{(1+y) - (1+x)} = a_1 + a_2\frac{y^2-x^2}{y-x} + a_3\frac{y^3-x^3}{y-x} + \ldots$$

Läßt man hierin die Differenz $y-x$ unendlich abnehmen, so folgt vermöge des vorigen Lehrsatzes

$$m(1+x)^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \qquad (2.)$$

Um jetzt die beiden Reihen (1.) und (2.) vergleichen zu können, multiplicire man die erste mit m und die zweite mit $1 + x$. Dann wird aus (1.)

$$m(1+x)^m = ma_0 + ma_1 x + ma_2 x^2 + ma_3 x^3 + \ldots$$

und aus (2.)

$$m(1+x)^m = a_1 + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + \ldots$$

Hieraus folgt nach §. 15

$$a_1 = ma_0$$

$$2a_2 + a_1 = ma_1 \quad \text{mithin} \quad a_2 = \frac{m-1}{2} a_1 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_0$$

$$3a_3 + 2a_2 = ma_2 \quad \text{,,} \quad a_3 = \frac{m-2}{3} a_2$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_0$$

ꝛc. ꝛc.

also hat man

$$(1+x)^m = a_0 + ma_0 x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_0 x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_0 x^3 + \ldots$$

Jetzt bleibt noch der Coefficient a_0 zu bestimmen. Zu dem Zwecke setze man $x = 0$. Dann wird aus dieser letzten Gleichung

$$1^m = a_0$$

mithin $a_0 = 1$ oder, wenn m ein Bruch mit geradem Nenner ist, $a_0 = \pm 1$. Wenn man also auch in diesem letzten Falle nur den positiven Werth der Potenz ausdrücken will, so hat man allgemein $a_0 = 1$ zu setzen und gelangt damit schließlich zu der oben aufgestellten Binomialreihe.

§. 43.

Lehrsatz. Die Binomialreihe ist eine geschlossene Reihe, wenn der Exponent eine absolute ganze Zahl ist. In allen anderen Fällen ist sie eine unendliche Reihe.

Beweis. Soll die Reihe eine geschlossene Reihe werden, so müssen, von einer bestimmten Stelle anfangend, die Coefficienten

derselben zu Null werden. Nun ist der allgemeine Ausdruck des $r$ten Coefficienten der Binomialreihe

$$a_r = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}$$

und soll dieser, und mithin auch alle folgenden zu Null werden, so muß man haben

$$m - r + 1 = 0$$

$$\text{d. i.} \qquad r = m + 1.$$

Der durch diese Gleichung bestimmte Werth von r ist aber immer dann, und nur dann möglich, wenn m eine absolute ganze Zahl ist.

Die Binomialreihe für den Fall, wo der Exponent eine absolute ganze Zahl ist, liefert genau wieder den binomischen Lehrsatz des §. 34 und wird deshalb hier nicht weiter betrachtet. Die folgenden Untersuchungen haben es nur mit der unendlichen Binomialreihe zu thun.

§. 44.

Lehrsatz. Die unendliche Binomialreihe als Entwickelung der Potenz $(1 + x)^m$ ist eine convergirende Reihe für alle algebraischen Werthe von x, welche zwischen den Werthen $x = +1$ und $x = -1$ liegen, dagegen eine divergirende Reihe für alle Werthe von x, welche außerhalb der gedachten beiden Schranken enthalten sind.

Beweis. Betrachtet man die Coefficienten a_r und a_{r+1} der Binomialreihe, so hat man

$$a_r = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}$$

$$a_{r+1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-r)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(r+1)}$$

folglich

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{m-r}{r+1} \quad \text{d. i.} = \frac{m+1}{r+1} - 1$$

und hieraus für wachsende Werthe von r

$$\lim \frac{a_{r+1}}{a_r} = -1$$

woraus nach §. 14 der zu beweisende Satz folgt.

Die unendliche Binomialreihe kann demnach zur Berechnung der Werthe der Potenz $(1+x)^m$ unmittelbar nur gebraucht werden, so lange die Basis $1+x$ zwischen den Werthen 0 und 2 enthalten ist. Auch ist sofort klar, daß die Reihe desto rascher convergiren wird, je kleiner man x, seinem Zahlwerthe nach, annimmt. Für hinreichend kleine Werthe von x kann man selbst schon die Reihe auf ihre beiden ersten Glieder reduciren, indem man setzt

$$(1+x)^m = 1 + mx$$

von welcher Gleichung ein sehr häufiger Gebrauch gemacht wird. So ist z. B. $\frac{1}{1{,}012} = 0{,}988$ und $\sqrt[3]{1{,}012} = 1{,}004$, wo im ersten Falle $m = -1$ und im zweiten Falle $m = \frac{1}{3}$ war und die Resultate auf drei Decimalstellen genau sind.

§. 45.

Zusatz. Für negative Exponenten nimmt die Binomialreihe die Gestalt an

$$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{1 \, . \, 2} x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} x^3 + \ldots \text{in inf.}$$

Diese Reihe ergiebt sich, wenn man in der allgemeinen Binomialreihe (§. 42) die Substitution $m = -n$ vornimmt.

Da man immer hat

$$(1+x)^{-n} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

und wenn $1+x$ zwischen 0 und 2 liegt, $\frac{1}{1+x}$ zwischen ∞ und $\frac{1}{2}$ enthalten sein wird, so sieht man leicht, daß durch diese Reihe alle Potenzen, deren Basis zwischen ∞ und $\frac{1}{2}$ liegt, berechnet werden können. Von dieser Bemerkung wird unten (§. 47, Aufl. 2) eine verallgemeinerte Anwendung gemacht werden.

§. 46.

Zusatz. Für positive und negative Bruch-Exponenten nimmt die Binomialreihe die folgenden Gestalten an

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{q \cdot 2q}x^2 + \frac{p(p-q)(p-2q)}{q \cdot 2q \cdot 3q}x^3 + \ldots$$

$$(1+x)^{-\frac{p}{q}} = 1 - \frac{p}{q}x + \frac{p(p+q)}{q \cdot 2q}x^2 - \frac{p(p+q)(p+2q)}{q \cdot 2q \cdot 3q}x^3 + \ldots$$

Diese Reihen entstehen, wenn man in der allgemeinen Binomialreihe (§. 42) die Substitutionen $m = \frac{p}{q}$ und $m = -\frac{p}{q}$ ausführt.

Bei der zweiten dieser Reihen läßt sich die Bemerkung des vorigen Paragraphen wiederholen.

§. 47.

Aufgabe. Den Werth der Potenz $(a+b)^m$ zu berechnen, wenn der Werth von a^m als bekannt vorausgesetzt wird und b eine kleine Zahl bedeutet.

Auflösung 1. Man setze

$$(a+b)^m = a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m$$

und entwickele den zweiten Factor dieses letzten Products nach der Hauptzahl $\frac{b}{a}$. Damit die Entwickelung brauchbar werde, muß dem Zahlwerthe nach $a > b$ sein, weil nur dann die entstehende Reihe convergirt.

Auflösung 2. Man setze

$$(a+b)^m = a^m \left(\frac{a+b}{a}\right)^m = a^m \left(\frac{a}{a+b}\right)^{-m} = a^m \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)^{-m}$$

und entwickele den zweiten Factor dieses letzten Products n(
Hauptzahl $-\frac{b}{a+b}$. Damit die Entwickelung brauchbar
muß dem Zahlwerthe nach $a+b>b$ sein, weil nur da
hervorgehende Reihe convergirt.

Beispiel. Es sei $\sqrt{5}$ zu berechnen. Man zerlege die
in zwei Theile, von denen der erste eine ihr zunächst liegende
dratzahl ist, also $5 = 4 + 1$. Dann hat man nach der

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}} = 2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1.1}{2.4}\left(\right.\right.$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^3 +$$

und die numerische Rechnung stellt sich wie folgt:

$$1 = 1{,}00000$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0{,}12500 \qquad -\frac{1.1}{2.4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = -0$$
$$+\frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}00097 \qquad -\frac{1.1.3.5}{2.4\ 6.8}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = -0$$
$$+\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0{,}00003 \qquad -\frac{1.1.3.5.\ 7.\ 9}{2.4.6.8.10.12}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = -0$$
$$1{,}12600 \qquad\qquad -0$$

Also $\sqrt{5} = 2 \,.\, 1{,}11803 = 2{,}23606$, wo nur die letzte Ziff
sicher ist, da der ganze in der vorstehenden Rechnung wegg
Rest weniger als

$$\frac{1.1.3.5.\ 7\ .\ 9\ .11}{2.4.6.8.10\ 12.14}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7 = 0{,}000001$$

beträgt (vergl. §. 10).

Oder nach Aufl. 2.

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right.$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{5}\right)^3 +$$

wo die numerische Rechnung folgende ist

$$
\begin{aligned}
1 &= 1{,}00000\\
+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} &= 0{,}10000\\
+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{5}\right)^2 &= 0{,}01500\\
+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{5}\right)^3 &= 0{,}00250\\
+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{1}{5}\right)^4 &= 0{,}00044\\
+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\left(\frac{1}{5}\right)^5 &= 0{,}00008\\
+\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\left(\frac{1}{5}\right)^6 &= 0{,}00001\\
\hline
&\quad 1{,}11803
\end{aligned}
$$

Also $\sqrt{5} = 2 \,.\, 1{,}11803 = 2{,}23606$ wie vorhin, wo wieder nur die letzte Ziffer unsicher ist, wie sich aus §. 11, Anmerk. 2 nachweisen läßt.

Eine schnellere Convergenz kann man erhalten, wenn man die gegebene Zahl 5 zuvor mit einer solchen Quadratzahl multiplicirt, daß das Product sehr nahe an eine Quadratzahl kommt. Dazu eignet sich im vorliegenden Falle die Zahl 16, da 5.16 nahe an 81 kommt, und man wird also nach Aufl. 1 setzen

$$
\sqrt{5} = \sqrt{\frac{80}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{81-1} = \frac{9}{4}\sqrt{1-\frac{1}{81}}
$$
$$
= \frac{9}{4}\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{81} - \ldots\right]
$$

und die numerische Rechnung wird

$$
1 = 1{,}00000 \qquad
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{81} &= -\,0{,}00617\\
-\frac{1.1}{2.4}\cdot\left(\frac{1}{81}\right)^2 &= -\,0{,}00002\\
\hline
&\quad -\,0{,}00619
\end{aligned}
$$

Also $\sqrt{5} = \frac{9}{4} \,.\, 0{,}99381 = 2{,}23607.$

Oder nach Aufl. 2

$$\sqrt{5} = \sqrt{\frac{80}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{81-1} = \frac{9}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{80}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{9}{4}\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{80} + \ldots\right]$$

wo die numerische Rechnung wird

$$1 = 1{,}00000 \qquad -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{80} = -\,0{,}00625$$

$$+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{80}\right)^2 = 0{,}00006$$

$$1{,}00006$$

Also $\sqrt{5} = \frac{9}{4}\cdot\, 0{,}99381 = 2{,}23607$ wie vorhin.

Die vorstehenden Resultate lassen sich leicht durch Logarithmen prüfen. Es kann aber Fälle geben, in denen man eine gesuchte Potenz auf eine so große Anzahl von Decimalstellen zu berechnen verlangt, daß dabei alle logarithmischen Tafeln im Stich lassen. In solchen Fällen finden die vorstehenden Methoden ihre eigentliche Anwendung.

Vierter Abschnitt.

Entwickelung der Exponentialreihe und der logarithmischen Reihe.

Die Exponentialreihe.

§. 48.

Erklärung. Unter der Exponentialreihe versteht man diejenige unendliche Reihe, welche durch die Entwickelung der Potenz a^x nach der Hauptzahl x entsteht, wo eine beliebige positive Zahl bedeutet.

Man kann auch sagen, die Exponentialreihe stelle die Entwickelung einer Zahl durch ihren Logarithmus dar. Denn die Beziehung zwischen einer Potenz und ihrem Exponenten ist identisch mit derjenigen zwischen einer Zahl und ihrem Logarithmus.

Der Grund, weshalb negative Werthe der Basis a ausgeschlossen bleiben müssen, ist der nämliche, welcher in jedem logarithmischen Systeme stattfindet, nämlich um nicht in Fällen, wo man für x einen Bruch mit geradem Nenner setzt, auf imaginäre Werthe der Potenz zu gelangen, die hier noch nicht betrachtet werden.

§. 49.

Lehrsatz. Es ist für unendlich wachsende Werthe von m

$$\lim \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in inf.}$$

Beweis. Setzt man in der Binomialreihe (§. 42), in welcher $m > 1$ sei, $x = \frac{1}{m}$, so erhält man die folgende convergirende Reihe

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m.\frac{1}{m} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}.\frac{1}{m^2} + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.\frac{1}{m^3} + \ldots$$

welche man auch umformen kann in

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1.\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1\,.\,2} + \frac{1.\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

Läßt man hierin m unendlich wachsen, so folgt sofort die oben aufgestellte Gleichung.

Anmerkung. Die Convergenz der im Lehrsatze aufgestellten Reihe, welche hier aus dem Beweise von selbst folgt, ist auch bereits selbständig bewiesen im §. 11.

§. 50.

Zusatz. Es ist auch für unendlich abnehmende We von α

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in}$$

Dies folgt aus dem vorigen Lehrsatze, wenn man darin $m =$ substituirt.

Man kann aber auch den Beweis ähnlich wie den vorigen mittelbar aus §. 42 führen.

§. 51.

Erklärung. Unter der Zahl e versteht man die Sun der unendlichen Reihe

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in inf.}$$

Um den Werth dieser Zahl e zu finden, kann man Folgei bemerken.

1) Die Zahl e liegt zwischen den ganzen Zahlen 2 und 3. T daß $e > 2$ ist, folgt schon aus der Betrachtung der beiden ei Glieder der Reihe. Vergleicht man ferner den Rest der Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in inf.}$$

mit der geometrischen Progression

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \text{ in inf.}$$

deren Summe $= 1$ ist, so sieht man leicht, daß jener Rest wer beträgt als diese Summe, also $e < 3$ sein muß.

2) Die Zahl e ist irrational. Denn es sei e gleich einem r nalen Bruche $\frac{p}{q}$, so daß man habe

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in inf.}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Producte $1.2.3\ldots q$

erhält man auf der linken Seite eine ganze Zahl, dagegen auf der rechten Seite eine ganze Zahl nebst dem Werthe

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\ldots \text{ in inf.}$$

welcher weniger beträgt als die Summe der geometrischen Progression

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\ldots \text{ in inf.}$$

d. i. weniger als $\frac{1}{q}$; was ein Widerspruch ist.

3) Die wirkliche Rechnung giebt $e = 2{,}7182\;8182\;8459\ldots$

§. 52.

Lehrsatz. Die Entwickelung der Potenz e^x giebt die Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in inf.}$$

Diese Reihe ist die Exponentialreihe für den besonderen Fall der Basis e.

Beweis. Setzt man in der Binomialreihe (§. 42) an die Stelle von x den Werth $\frac{x}{m}$, so erhält man, so lange $x < m$ bleibt, die folgende convergirende Reihe

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + m.\frac{x}{m} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}.\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots$$

welche man auch umformen kann in

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + x + \frac{1.\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{1.\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$

Nun ist für unendlich wachsende Werthe von m

$$\lim \left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}} = e$$

da es offenbar in dem Beweise des §. 49 nichts ändert, wenn man darin $\frac{m}{x}$ statt m schreibt; folglich ist

$$\lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

und man erhält mithin als Grenze für wachsende m aus der vorstehenden Gleichung genau die Behauptung des Lehrsatzes.

Anmerkung. Daß die in diesem Lehrsatze aufgestellte Reihe für jeden Werth von x convergire, folgt nicht nur aus dem vorstehenden Beweise, sondern ist auch bereits selbständig bewiesen im §. 14.

§. 53.

Lehrsatz. Die Entwickelung der Potenz a^x, in welcher a eine beliebige positive Zahl bedeutet, giebt die Reihe

$$a^x = 1 + x . \frac{\log a}{\log e} + \frac{x^2}{1.2} . \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 + \frac{x^3}{1.2.3} . \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

wo die durch log angezeigten Logarithmen für einerlei jedoch vollkommen beliebige Basis zu nehmen sind.

Diese Reihe ist die Exponentialreihe für eine beliebige Basis.

Beweis. Um a^x als Potenz von e auszudrücken, setze man $a^x = e^y$, woraus für ein beliebiges logarithmisches System folgt

$$x . \log a = y . \log e$$

$$\frac{x . \log a}{\log e} = y$$

also

$$a^x = e^{x . \frac{\log a}{\log e}}.$$

Die Entwickelung dieser letzten Potenz nach §. 52 liefert den obigen Lehrsatz.

Man kann bemerken, daß wenn die hier vorkommenden Logarithmen im Systeme der Basis a genommen werden, $\log a =$ zu setzen ist; werden sie dagegen im Systeme der Basis e genommen, so hat man $\log e = 1$ zu setzen.

Die logarithmische Reihe.

§. 54.

Erklärung. Unter der logarithmischen Reihe versteht man diejenige unendliche Reihe, welche durch die Entwickelung von $\overset{a}{\log}(1+x)$ nach der Hauptzahl x entsteht, wo die Basis a eine beliebige positive Zahl ist.

Die logarithmische Reihe löst die umgekehrte Aufgabe von derjenigen der Exponentialreihe. Denn in der letzteren wird die Potenz durch den Exponenten, dagegen in der ersteren der Exponent durch die Potenz ausgedrückt.

§. 55.

Lehrsatz. Es ist für unendlich abnehmende Werthe von m

$$\lim \frac{(1+x)^m - 1}{m} = \frac{\log(1+x)}{\log e}$$

wo die angezeigten Logarithmen für einerlei, jedoch vollkommen beliebige Basis zu nehmen sind.

Beweis. Da $(1+x)^m$ für abnehmende Werthe von m die Grenze 1 hat, so kann man setzen

$$(1+x)^m = 1 + \delta$$

wo δ eine zugleich mit m unendlich abnehmende Zahl bedeutet. Daraus folgt für ein beliebiges logarithmisches System

$$m \log(1+x) = \log(1+\delta)$$

$$m = \frac{\log(1+\delta)}{\log(1+x)}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\frac{(1+x)^m - 1}{m} = \frac{\log(1+x)}{\log(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}}$$

woraus durch unendlich abnehmende Werthe von m, und folglich auch von δ, man unter Zuziehung von §. 50 zu der Behauptung des Lehrsatzes gelangt.

§. 56.

Lehrsatz. Die Entwickelung von $\overset{a}{\log}(1+x)$, wo die Basis a eine beliebige positive Zahl ist, giebt die Reihe

$$\overset{a}{\log}(1+x) = \overset{a}{\log}\, e \,.\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ in inf.}\right)$$

Diese Reihe ist die logarithmische Reihe.

Beweis. Aus der Binomialreihe §. 42 erhält man unmittelbar

$$\frac{(1+x)^m - 1}{m} = x + \frac{m-1}{2}x^2 + \frac{(m-1)\,(m-2)}{2\,.\,3}x^3$$
$$+ \frac{(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}x^4 + \ldots$$

welche Reihe für jeden Werth von x zwischen $x = +1$ und $x = -1$ convergirt, welchen Werth auch der Exponent m haben mag.

Läßt man hierin m unendlich abnehmen, so folgt mit Rücksicht auf den vorigen Lehrsatz

$$\frac{\log\,(1+x)}{\log\, e} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ in inf.}$$

und hieraus, indem man die Logarithmen auf die Basis a bezieht, die obige Reihe.

Anmerkung. Sowohl die Exponentialreihe als auch die logarithmische Reihe ist hier, wie man sieht, aus der Binomialreihe abgeleitet worden; die erstere als Grenze für unendlich wachsende m (nachdem zuvor x durch $\frac{x}{m}$ ersetzt worden ist) und die letztere als Grenze für unendlich abnehmende m.

§. 57.

Zusatz. Die logarithmische Reihe convergirt für alle Werthe von x, welche zwischen $x = +1$ und $x = -1$ liegen, divergirt dagegen für alle Werthe von x, welche außerhalb dieser beiden Schranken enthalten sind.

Dies folgt aus dem vorigen Beweise, kann aber auch selbständig aus §. 14 bewiesen werden.

Die logarithmische Reihe kann hiernach zur Berechnung der Logarithmen unmittelbar nur für Zahlen gebraucht werden, welche

zwischen 0 und 2 liegen, und convergirt um so langsamer, je näher diese Zahlen an 0 und 2 kommen. Für kleine Werthe von x kann man übrigens schon setzen

$$\overset{a}{\log}(1+x) = x.\overset{a}{\log}\, e$$

z. B. in einer fünfstelligen Tafel der Briggischen Logarithmen hat man log 1,001 = 0,00043, wo 0,43... nichts anderes ist als der Briggische Logarithmus der Zahl e (siehe §. 59).

Es ist indessen durch geringe Umformungen immer möglich, die logarithmische Reihe auch zur Berechnung der Logarithmen von Zahlen einzurichten, welche nicht auf das Intervall zwischen 0 und 2 beschränkt sind. Da man z. B. setzen kann

$$\overset{a}{\log}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\overset{a}{\log}(1+x)$$

und wenn $1+x$ zwischen 0 und 2 liegt, $\frac{1}{1+x}$ zwischen ∞ und $\frac{1}{2}$ enthalten sein wird, so sieht man, wie durch diese Umformung vermittelst der logarithmischen Reihe auch die Logarithmen aller Zahlen, welche zwischen ∞ und $\frac{1}{2}$ liegen, berechnet werden können. Da man ferner hat

$$\overset{a}{\log}(1+x) = \overset{a}{\log}\, e.\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\right)$$

$$\overset{a}{\log}(1-x) = \overset{a}{\log}\, e.\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\right)$$

woraus durch Subtraction folgt

$$\overset{a}{\log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\,\overset{a}{\log}\, e.\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots\right)$$

und wenn $1+x$ zwischen 0 und 2 liegt, $\frac{1+x}{1-x}$ zwischen 0 und ∞ enthalten sein wird, so sieht man, wie hieraus die Logarithmen sämmtlicher positiven Zahlen berechnet werden können, während diese Reihe zugleich den Vortheil bietet, daß sie wegen Wegfalls aller geraden Potenzen von x schneller convergirt. Von diesen Bemerkungen wird unten Anwendung gemacht werden.

§. 58.

Erklärung. Unter den **natürlichen Logarithmen** versteht man die Logarithmen desjenigen logarithmischen Systems, welches die Zahl e zur Basis hat.

Zur Bezeichnung der natürlichen Logarithmen gebraucht man den Buchstaben l.

Für natürliche Logarithmen nimmt die logarithmische Reihe §. 56 die einfachere Gestalt an

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ in inf.}$$

und für Logarithmen irgend eines anderen Systems hat man sodann

$$\overset{a}{\log}(1+x) = \overset{a}{\log} e \,.\, l(1+x).$$

Zur Berechnung logarithmischer Tafeln ist es hiernach immer am einfachsten, zuerst eine Tafel der natürlichen Logarithmen zu berechnen und aus dieser sodann vermittelst der letzten Gleichung die Logarithmen irgend eines anderen Systems abzuleiten. Daraus erklärt sich auch die Benennung „natürliche" Logarithmen.

Die natürlichen Logarithmen werden auch hyperbolische Logarithmen genannt, wegen einer gewissen Beziehung zur Hyperbel, die hier nicht erläutert werden kann. Man nennt sie auch Napier'sche Logarithmen, weil der Erfinder der Logarithmen, John Napier, durch seine Anschauung der Sache zuerst zu Logarithmen gelangte, welche den natürlichen Logarithmen sehr nahe kommen, obwohl nicht vollkommen identisch mit denselben sind. Genau ebenso erging es dem deutschen Erfinder der Logarithmen, Justus Byrg. Erst Briggs hat die jetzt allgemein üblichen Logarithmen eingeführt, welche die Zahl 10 zur Basis haben.

Man sehe hierüber des Verf. fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, 4. Auflage, §. 17 der Einleitung. Daselbst findet man auch pag. 116 eine Tafel der natürlichen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000, welche man hier vergleichen mag.

§. 59.

Erklärung. Unter dem **Modulus** eines logarithmischen Systems versteht man denjenigen Factor, mit welchem man

den natürlichen Logarithmus irgend einer Zahl multipliciren muß, um den Logarithmus derselben Zahl in dem betreffenden logarithmischen Systeme zu erhalten.

Der Modulus eines logarithmischen Systems ist nur von der Basis dieses Systems abhängig. Bezeichnet man den Modulus für die Basis a mit M, so hat man

$$\overset{a}{\log}(1+x) = M.\, l.(1+x)$$

oder die allgemeine logarithmische Reihe nimmt die Gestalt an

$$\overset{a}{\log}(1+x) = M.\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots \text{in inf.}\right)$$

worin nach dem vorigen Paragraphen M den Werth hat

$$M = \overset{a}{\log}\, e. \qquad (1.)$$

Statt dieses Werthes von M kann man auch setzen (Arithmetik §. 278)

$$M = \frac{\log e}{\log a} \qquad (2.)$$

wo die Logarithmen im Zähler und Nenner für einerlei, sonst jedoch vollkommen beliebige Basis genommen werden müssen; oder endlich auch, wenn man eine Tafel der natürlichen Logarithmen als gegeben voraussetzt,

$$M = \frac{1}{l\,a}. \qquad (3.)$$

Das Umgekehrte des Modulus oder der Werth $\frac{1}{M}$ ist offenbar derjenige Factor, mit welchem man den Logarithmus irgend einer Zahl für die Basis a multipliciren muß, um den natürlichen Logarithmus dieser Zahl zu erhalten.

Für Briggische Logarithmen ist

$$M = 0{,}4342\ 9448\ 19$$

$$\frac{1}{M} = 2{,}3025\ 8509\ 30.$$

§. 60.

Aufgabe. **Den Logarithmus von $a+b$ für irgend eine Basis zu berechnen, wenn der Logarithmus von a für**

dieselbe Basis als bekannt vorausgesetzt wird, und b eine kleine Zahl bedeutet.

Auflösung 1. Man setze

$$\log(a+b) = \log a + \log\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

und entwickele den zweiten Theil dieser Summe nach der Hauptzahl $\frac{b}{a}$. Damit die hervorgehende Reihe convergire, muß dem Zahlwerthe nach $a > b$ sein.

Auflösung 2. Man setze

$$\log(a+b) = \log a + \log\left(\frac{a+b}{a}\right) = \log a - \log\left(\frac{a}{a+b}\right)$$
$$= \log a - \log\left(1-\frac{b}{a+b}\right)$$

und entwickele den zweiten Theil dieser letzten Summe nach der Hauptzahl $-\frac{b}{a+b}$. Damit die Reihe convergire, muß dem Zahlwerthe nach $a+b > b$ sein.

Auflösung 3. Man setze

$$\log(a+b) = \log a + \log\left(\frac{a+b}{a}\right) = \log a + \log\left(\frac{2a+b+b}{2a+b-b}\right)$$
$$= \log a + \log\left(\frac{1+\frac{b}{2a+b}}{1-\frac{b}{2a+b}}\right)$$

und entwickele den zweiten Theil dieser letzten Summe nach der Hauptzahl $\frac{b}{2a+b}$, nach dem Vorbilde der Entwickelung von $\log\frac{1+x}{1-x}$ im §. 57. Die hervorgehende Reihe wird noch schneller convergiren als diejenige der vorigen Auflösung, und zwar um so mehr, da in ihr die geraden Potenzen der Hauptzahl wegfallen.

Zur Berechnung einer logarithmischen Tafel hat man diese Methoden so anzuwenden, daß man Schritt vor Schritt die Logarithmen aller Primzahlen berechnet, aus denen man sodann die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen auf bekannte Weise ableitet.

Beispiel. Es sei gegeben $l\,12 = 2{,}48491$ und man sucht $l\,13$. Nach Aufl. 1 erhält man

$$l\,13 = l\,12 + \frac{1}{12} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^3 \ldots$$

dagegen nach Aufl. 2

$$l\,13 = l\,12 + \frac{1}{13} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{13}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{13}\right)^3 \ldots$$

endlich nach Aufl. 3

$$l\,13 = l\,12 + 2.\left[\frac{1}{25} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{25}\right)^3 \ldots\right].$$

Diese letzte Rechnung, welche die einfachste von allen ist, stellt sich ausgeführt wie folgt:

$$\frac{1}{25} = 0{,}04000$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{25}\right)^3 = 0{,}00002$$

$$0{,}04002$$

Also $l\,13 = 2{,}48491 + 0{,}08004 = 2{,}56495$, bis auf die letzte Stelle genau, da der in vorstehender Rechnung weggelassene Rest weniger als

$$\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{25}\right)^5 + \left(\frac{1}{25}\right)^7 + \ldots \text{ in inf.}\right]$$

d. h. weniger als

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{25}\right)^3 \cdot \frac{1}{624} = 0{,}00000002$$

beträgt (vergl. §. 11 Anm. 2).

Im Briggischen Systeme würde man, wenn $\log 12 = 1{,}07918$ gegeben ist, aus dieser letzten Rechnung haben

$$\log 13 = 1{,}07918 + 0{,}43429 \,.\, 0{,}08004 = 1{,}11394$$

wo $0{,}43429$ der Modulus des Briggischen Systems ist (§. 59).

Anmerkung. Wenn b sehr klein ist im Vergleich mit a, so erhält man in Aufl. 1 einfach

$$\log(a + b) = \log a + \frac{Mb}{a}$$

wo M den Modulus des Systems bedeutet. Auf dieser Gleichung beruht das gewöhnliche Interpoliren der logarithmischen Tafeln; denn die sogenannten Proportionaltheile sind nichts anderes als die Werthe

$$\frac{0{,}1.M}{a},\ \frac{0{,}2.M}{a},\ \frac{0{,}3.M}{a},\ \frac{0{,}4.M}{a},\ \frac{0{,}5.M}{a},\ \frac{0{,}6.M}{a},\ \frac{0{,}7.M}{a},\ \frac{0{,}8.M}{a},\ \frac{0{,}9.M}{a}$$

Fünfter Abschnitt.

Die Zinseszins- und Rentenrechnung.

---

§. 61.

Erklärung. Unter dem **Zinsfuß** versteht man denjenigen Factor, mit welchem man ein gegebenes Capital multipliciren muß, um den Werth dieses Capitals nebst Zinsen nach Ablauf eines Jahrs zu erhalten.

Es sei a ein gegebenes zinstragendes Capital und r der gegebene Zinsfuß. Dann ist, nach dieser Erklärung, der Werth dieses Capitals nebst Zinsen nach Ablauf eines Jahrs $= ar$.

In der gewöhnlichen Zinsrechnung, welche hier als bekannt vorausgesetzt wird, pflegt man die Verzinsung eines Capitals in **Procent** auszudrücken. Daraus ist leicht der Zinsfuß in dem obigen Sinne abzuleiten. Denn es betrage die Verzinsung p Procent; dann liefert das Capital a an einjährlichen Zinsen den Betrag $\frac{ap}{100}$, also betragen Capital und Zinsen zusammen nach Ablauf eines Jahrs $a + \frac{ap}{100}$ d. i. $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Hieraus folgt durch Vergleichung mit dem Obigen für den Zinsfuß r der Werth

$$r = 1 + \frac{p}{100}.$$

So z. B. eine Verzinsung von 3, 4, $4\frac{1}{2}$ rc. Procent ergiebt den Zinsfuß 1,03, 1,04, 1,045 rc. Der Zinsfuß ist immer ein Binomium, welches aus Eins mit einem angehängten, in der Regel kleinen Bruche besteht.

Zuweilen wird der Zinsfuß für eine andere Zeit=Einheit als das Jahr gegeben. In solchen Fällen muß die betreffende Zeit=Einheit immer ausdrücklich genannt werden.

Anmerkung. Man kann auch sagen, der Zinsfuß sei der Werth des Capitals 1 nebst Zinsen nach Ablauf eines Jahrs.

§. 62.

Zusatz. Wenn man ein gegebenes Capital mit dem um Eins verminderten Zinsfuße multiplicirt, so erhält man den Betrag seiner einjährlichen Zinsen.

So liefert ein gegebenes Capital a zu dem gegebenen Zinsfuße r die einjährlichen Zinsen $a(r-1)$. Denn wenn man hierzu wieder a addirt, so erhält man für Capital und Zinsen nach Ablauf des Jahrs den Betrag ar, wie oben.

Wenn man das gegebene Capital auch durch das zweite, dritte rc. Jahr verfolgt und beständig um seine einjährlichen Zinsen vermehrt, so nimmt dasselbe von Jahr zu Jahr die Werthe an

$$a, \quad a+a(r-1), \quad a+2a(r-1), \quad a+3a(r-1), \text{ rc.},$$

welche eine arithmetische Progression bilden. Man nennt dies ein Wachsen des Capitals durch einfache Zinsen.

Wenn man dagegen den ganzen mit dem Schlusse eines jeden Jahrs gewonnenen Werth des Capitals jederzeit im folgenden Jahre wieder wie zinstragendes Capital betrachtet und demgemäß vermehrt, so nimmt das gegebene Capital von Jahr zu Jahr die Werthe an

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \text{ rc.}$$

welche eine geometrische Progression bilden. Man nennt dies ein Wachsen des Capitals durch Zinseszinsen.

Im letzten Falle tragen auch die Zinsen eines jeden Jahrs in der Folge wieder Zinsen (daher die Benennung Zinseszins oder Zins auf Zins), was im ersten Falle nicht geschieht.

Hier wird nur von solchen Anwendungen der Zinsrechnung d Rede sein, welche ein Wachsen der Capitale durch Zinseszinse voraussetzen.

Die Zinseszinsrechnung.

§. 63.

Lehrsatz. Wenn ein gegebenes Capital a zu dem gegebenen Zinsfuße r mit Zinseszinsen wächst, so wird de Betrag desselben nach n Jahren, welcher c sei, durch d Gleichung gefunden

$$c = ar^n.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem vorigen Paragraph (man vergleiche auch Arithm. §. 169).

Die numerische Rechnung wird hier immer am bequemsten dur Logarithmen geführt. Es ist aber zweckmäßig, um möglichst genau Resultate zu erhalten, den Logarithmus von r auf eine oder zw Decimalstellen mehr zu nehmen, als im Uebrigen die logarithmisc Rechnung geführt wird, damit man der letzten Decimalstelle sich gehe*). Wo die Logarithmen nicht ausreichen, da muß man d Potenzen von r durch die Binomialreihe berechnen.

Beispiel 1. Ein Capital von 6000 ₰ wächst zu 4 Proce mit Zinseszinsen. Wie groß ist sein Werth nach 10 Jahren?

Antwort. $c = 6000 \, . \, 1{,}04^{10} = 8881{,}5$ ₰. (Die Verzinsun durch einfache Zinsen giebt nur 8400 ₰.)

Die Zinseszinsen finden auch in Gebieten Anwendung, in den nicht von Geldsummen die Rede ist, wie in den folgenden Beispiele

Beispiel 2. Ein Forstbestand ist zu 7500 Klaftern abgeschä und erfährt einen jährlichen Zuwachs von 3 Procent. Wie v hält der Bestand nach 12 Jahren?

Antw. 10693 Klafter.

---

*) Für diesen Gebrauch folgen hier die Logarithmen einiger üblichen Zinsfu auf zehn Decimalstellen.

log 1,025 = 0,01072 38654	log 1,03 = 0,01283 72247
log 1,035 = 0,01494 03498	log 1,04 = 0,01703 33393
log 1,045 = 0,01911 62904	log 1,05 = 0,02118 92991

Beispiel 3. Die Bevölkerung eines Landes beträgt jetzt 2650000 Köpfe und vermehrt sich jährlich um $2\frac{1}{2}$ Procent. Wie groß wird dieselbe nach 20 Jahren sein?

Antw. 4342400 Köpfe.

§. 64.

Zusatz. Der vorige Lehrsatz bleibt unverändert bestehen, auch wenn die Zahl der Jahre eine gebrochene oder gemischte Zahl ist.

Denn man denke sich das Jahr in m gleiche Theile getheilt und verfolge das mit Zinseszinsen wachsende Capital a durch dieses Jahr von $\frac{1}{m}$ zu $\frac{1}{m}$ Jahr. Setzt man den unbekannten Zinsfuß für $\frac{1}{m}$ Jahr $= x$, so muß das Wachsen des Capitals von $\frac{1}{m}$ zu $\frac{1}{m}$ Jahr nach folgender geometrischen Progression geschehen

$$a, \; ax, \; ax^2, \; ax^3, \; ax^4, \text{ etc.}$$

Aber nach Ablauf von $\frac{m}{m}$ Jahr muß nach §. 62 der Werth ar erscheinen, folglich muß man haben

$$ax^m = ar$$

woraus

$$x = \sqrt[m]{r}.$$

Demnach wird allgemein der Werth des Capitals a nach Ablauf von $\frac{k}{m}$ Jahr

$$ax^k = ar^{\frac{k}{m}}.$$

Man kann bemerken, daß wenn z. B. der jährliche Zinsfuß 1,04 beträgt, der halbjährliche Zinsfuß sein wird $\sqrt{1,04} = 1,01980$ und der vierteljährliche Zinsfuß $\sqrt[4]{1,04} = 1,00985$. Jeder der Decimalbrüche ist hier kleiner als die Hälfte des vorhergehenden, was sich leicht allgemein für jeden Zinsfuß durch die Binomialreihe beweisen läßt.

Anmerkung. Es kann geschehen, daß z. B. die halbjährliche Verzinsung in solcher Weise bedungen wird, daß nach jedem Halb-

jahre die Hälfte der dem Zinsfuße r entsprechenden Zinsen f
werden und wieder Zinsen tragen soll. Durch diese Beding
wird das Halbjahr zur Zeit=Einheit erhoben, der Zinsfuß für
Halbjahr beträgt $1 + \frac{r-1}{2}$ und mithin hat man als ganzjährli
Zinsfuß in die Rechnung einzuführen

$$\left(1 + \frac{r-1}{2}\right)^2.$$

Unter derselben Voraussetzung entspricht allgemein einer $\frac{1}{m}$jä
lichen Zinszahlung der ganzjährliche Zinsfuß

$$\left(1 + \frac{r-1}{m}\right)^m.$$

Z. B. für $r = 1{,}04$ hat man, wenn halbjährlich 2 Pro
Zinsen bezahlt werden sollen, nach dem ganzjährlichen Zins
$(1{,}02)^2 = 1{,}0404$ zu rechnen. Ebenso wenn vierteljährlich 1 P
cent Zinsen bezahlt werden sollen, nach dem ganzjährlichen Zins
$(1{,}01)^4 = 1{,}0406$.

Diese ganzjährlichen Zinsfuße werden mit wachsendem We
von m successive größer, wie sich leicht aus der Binomialreihe
weisen läßt. Sie wachsen aber nicht unbegrenzt. Denn setzt r
in dem letzten obigen Ausdrucke $m = \infty$, d. h. nimmt man
daß die Zinsen in jedem Augenblicke proportional der Dauer di
Augenblicks fällig werden und sofort wieder Zinsen tragen sol
so erhält man (s. §. 52) für den dieser Annahme entsprechen
ganzjährlichen Zinsfuß den Werth

$$\lim \left(1 + \frac{r-1}{m}\right)^m = e^{r-1}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. So z.
für $r = 1{,}04$ wird dieser Werth $= 1{,}040811$.

§. 65.

Lehrsatz. Um aus dem gegebenen Endwerthe eines (
pitals, c, eine der drei Größen a, r, n zu finden,
man die drei Gleichungen:

(1.) $$a = \frac{c}{r^n}$$

(2.) $$r = \sqrt[n]{\frac{c}{a}}$$

(3.) $$n = \frac{\log c - \log a}{\log r}.$$

Der Beweis ergiebt sich durch Auflösung der Gleichung §. 63 für a, r oder n.

Unmittelbare Anwendungen dieser Gleichungen sind in den folgenden Beispielen enthalten.

Beispiel 1. Welches Capital steigt mit Zinseszinsen zu 5 Procent nach 8 Jahren auf 12700 ₰?

Antw. $a = 8595{,}8$ ₰.

Beispiel 2. Um wie viel Procent wächst jährlich die Bevölkerung einer Stadt, wenn dieselbe in 40 Jahren von 28000 auf 81000 Köpfe gestiegen ist?

Antw. $r = 1{,}0269$, d. i. 2,69 Procent.

Beispiel 3. Wie lange muß ein Forstbestand von 12800 Klaftern geschont werden, wenn derselbe bei 3 Procent jährlichen Zuwachses auf 30000 Klafter steigen soll?

Antw. $n = 28{,}8$ Jahr.

Zusammengesetztere Aufgaben sind die folgenden:

Beispiel 4. Jemand ist in 5 Jahren 3000 ₰ zu zahlen schuldig. Wie viel muß er zahlen, zu $4\frac{1}{2}$ Procent gerechnet, wenn er schon in 3 Jahren seine Schuld tilgen will?

Antw. 2747,2 ₰.

Beispiel 5. Zu wie viel Procent muß ein gewisses Capital mit Zinseszinsen wachsen, wenn es schon nach 8 Jahren denselben Betrag erreichen soll, wie dasselbe Capital zu $3\frac{1}{2}$ Procent nach 10 Jahren?

Antw. 4,4 Procent.

Beispiel 6. Jemand hat in 4 Jahren 5000 ₰ zu fordern. Er hebt sogleich 1000 ₰ und nach 2 Jahren abermals 1000 ₰. Wie lange muß er, zu 5 Procent gerechnet, den Rest von 3000 ₰ stehen lassen?

Antw. 6,3 Jahr.

§. 66.

Aufgabe. Zu finden: 1) Zu wie viel Procent Capital mit Zinseszinsen wachsen muß, damit es in e gegebenen Zahl von Jahren sich verdoppelt, verdreifach und: 2) Wie lange ein Capital mit Zinseszinsen wac muß, damit es zu einem gegebenen Zinsfuße sich verdop verdreifacht ꝛc.

Auflösung. Man nehme an, das Capital solle allgemein seinen $m$fachen Werth steigen, und setze demgemäß $c = ma$ ir Gleichung des §. 63. Sodann giebt die Auflösung dieser Gleid

$$(1.) \qquad r = \sqrt[n]{m}$$

$$(2.) \qquad n = \frac{\log m}{\log r}.$$

Setzt man hierin $m = 2, 3$, ꝛc., so ist damit die vorgelegte gabe gelöst.

Wie man sieht, sind diese Resultate unabhängig von der G des Capitals, da dieses aus der Rechnung verschwunden ist.

Beispiele. Soll ein Capital in 20 Jahren mit Zinsesz sich verdoppeln, so muß der Zinsfuß betragen 3,53 Procent.

Soll dagegen ein Capital zu 5 Procent mit Zinseszinsen sich doppeln, so sind dazu erforderlich 14,2 Jahr.

§. 67.

Erklärung. Unter dem Discontfuß versteht man jenigen Factor, mit welchem man ein nach einem J fälliges Capital multipliciren muß, um den gegenwärt Werth desselben zu erhalten.

Oder wenn c ein nach einem Jahre fälliges Capital und ϱ gegebenen Discontfuß bedeutet, so ist der gegenwärtige Werth i Capitals $= c\varrho$.

Der Discontfuß ist hiernach nichts anderes als das Umgel des Zinsfußes. Denn wenn man aus dem so eben gefuni Werthe $c\varrho$ den Werth dieses Capitals nach einem Jahre, od wieder herleiten will, so muß man $c\varrho$ mit dem Zinsfuße r n pliciren (§. 61), also muß man haben

$$\varrho = \frac{1}{r}.$$

Der Discontfuß ist von bequemerem Gebrauche als der Zinsfuß in allen Fällen, wo es sich darum handelt, künftig fällige Capitale mit Rücksicht auf Zinseszinsen auf ihren gegenwärtigen Werth zurückzuführen (d. h. diese Capitale zu discontiren). Denn wenn c ein nach n Jahren fälliges Capital bedeutet, a den gegenwärtigen Werth desselben und ϱ den Discontfuß, so hat man aus der Gleichung (1.) §. 65

$$a = c \cdot \varrho^n$$

welche Gleichung bequemer zu handhaben ist als diejenige des §. 65 und in ihrer Form an die Gleichung des §. 63 erinnert. Sie ist, wie man leicht bemerken wird, im Grunde nichts anderes als eine Ausdehnung des Lehrsatzes §. 63 auf negative Werthe von n.

Beispiel. Zu einem Gute finden sich drei Käufer. Der erste bietet 72000 ℳ zahlbar nach 2 Jahren, der zweite 80000 ℳ zahlbar nach 4 Jahren, der dritte 40000 ℳ sogleich und 40000 ℳ nach 6 Jahren. Welches Gebot ist, zu 5 Procent gerechnet, das höchste?

Antw. Auf den gegenwärtigen Augenblick discontirt sind diese drei Gebote werth 65306 ℳ, 65816 ℳ und 69849 ℳ, also das dritte das höchste.

Anmerkung. Die vorstehende Rechnung bleibt unverändert gültig, auch wenn n eine gebrochene oder gemischte Zahl ist (s. §. 64).

Die Rentenrechnung.

§. 68.

Erklärung. Unter einer Rente versteht man eine von Jahr zu Jahr wiederkehrende Zahlung von gegebener Größe.

Die Rente kann jährlich gleich groß, oder auch nach einem gegebenen Gesetze veränderlich sein. Hier sollen nur Renten der ersten Art betrachtet werden.

Die Rente kann entweder sofort oder nach einer gegebenen Anzahl von Jahren anfangen; sie kann entweder nach einer gegebenen Anzahl von Jahren aufhören oder ins Unendliche fortlaufen.

Die Zahlungen eines jeden Jahrs können entweder im Anfange oder am Schlusse dieses Jahrs stattfinden.

Endlich kann die Rente auch halbjährlich, vierteljährlich ꝛc. fällig sein.

Anmerkung. Außer den hier aufgeführten Arten von Renten giebt es noch sogenannte Leibrenten, welche von der Lebensdauer einer oder mehrerer Personen abhängen. Man sehe darüber §. 93, Beispiel 2.

§. 69.

Lehrsatz. Der gegenwärtige Werth R einer Rente, welche jährlich b beträgt und von heute an n Jahre lang mit dem Schlusse eines jeden Jahrs fällig ist, beträgt durch den Discontfuß ϱ ausgedrückt

$$R = b\varrho \frac{1-\varrho^n}{1-\varrho} \qquad (1.)$$

oder durch den Zinsfuß r ausgedrückt

$$R = \frac{b}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}. \qquad (2.)$$

Beweis. Wenn man die einzelnen Rentenbeträge, deren jeder $= b$ ist, nach §. 67 auf die Gegenwart discontirt und die Resultate addirt, so erhält man

$$R = b\varrho + b\varrho^2 + b\varrho^3 + \ldots + b\varrho^n.$$

Die Summe dieser geometrischen Progression ergiebt die Gleichung (1.) und wenn man darin den Werth $\varrho = \frac{1}{r}$ substituirt, so erhält man die Gleichung (2.).

Beispiel. Jemand will eine Rente von jährlich 240 ₰ kaufen, zahlbar 15 Jahre lang am Schlusse eines jeden Jahrs. Welche Capitalzahlung hat er dafür zu leisten, wenn er 4 Procent Zinsen rechnet?

Antw. 2668,4 ₰.

Die Berechnung der gegenwärtigen Werthe von Renten wird sehr erleichtert durch sogenannte Rententafeln, die für Jedermann, der mit Rentenrechnungen viel zu thun hat, geradezu unentbehrlich sind. Man pflegt diese Rententafeln so einzurichten, daß man den jährlichen Betrag der Rente oder $b = 1$ setzt, indem die Multi-

plication mit dem gegebenen Werthe von b jederzeit nur eine leichte Arbeit ist. Bezeichnet man den gegenwärtigen Werth der obigen Rente unter der Voraussetzung $b = 1$ mit R_0, so hat also die Berechnung einer Rententafel nach der Gleichung zu geschehen

$$R_0 = \varrho \frac{1 - \varrho^n}{1 - \varrho} \quad \text{oder} \quad R_0 = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Die folgende Tabelle giebt ein Bruchstück einer solchen Rententafel.

Gegenwärtiger Werth einer Rente 1,
welche am Schlusse eines jeden Jahrs fällig ist.

Anzahl der Jahre	4 Procent	$4\frac{1}{2}$ Procent	5 Procent
1	0,96154	0,95694	0,95238
2	1,88609	1,87267	1,85941
3	2,77509	2,74896	2,72325
4	3,62990	3,58753	3,54595
5	4,45182	4,38998	4,32948
6	5,24214	5,15787	5,07569
7	6,00205	5,89270	5,78637
8	6,73274	6,59589	6,46321
9	7,43533	7,26879	7,10782
10	8,11090	7,91272	7,72173
11	8,76048	8,52892	8,30641
12	9,38507	9,11858	8,86325
13	9,98565	9,68285	9,39357
14	10,56312	10,22283	9,89864
15	11,11839	10,73955	10,37966
16	11,65230	11,23402	10,83777
17	12,16567	11,70719	11,27407
18	12,65930	12,15999	11,68959
19	13,13394	12,59329	12,08532
20	13,59033	13,00794	12,46221
⋮			
∞	25,00000	22,22222	20,00000

Wie mit Hülfe dieser Tabelle das obige Beispiel zu berechnen ist, wird man ohne Mühe erkennen.

Die letzte Zeile dieser Tabelle findet ihre Erläuterung

Anmerkung. Es kann auch zweckmäßig sein, eine Rententafel in solcher Weise zu entwerfen, daß sie die jährliche Rente für die Capitalzahlung 1 darstellt. Die Zahlen dieser Rententafel werden die umgekehrten Werthe der obigen sein.

§. 70.

Lehrsatz. Um aus dem gegenwärtigen Werthe, R, einer Rente, welche von heute an mit dem Schlusse eines jeden Jahrs fällig ist, entweder den Betrag dieser Rente, b, oder die Dauer derselben, n, zu finden, hat man die beiden Gleichungen

$$(1.)\qquad b = \frac{R}{\varrho}\cdot\frac{1-\varrho}{1-\varrho^n} \quad \text{oder } b = Rr^n\cdot\frac{r-1}{r^n-1}$$

$$(2.)\qquad n = \frac{\log\left[1-\frac{R}{b\varrho}(1-\varrho)\right]}{\log \varrho}$$

$$\text{oder } n = -\frac{\log\left[1-\frac{R}{b}(r-1)\right]}{\log r}$$

Der Beweis ergiebt sich durch Auflösung der beiden Gleichungen des vorigen Paragraphen für b oder n.

Beispiel 1. Jemand wünscht ein Capital von 10000 $\mathfrak{P}$, welches zu 4 Procent angelegt ist, so zu verwenden, daß er davon 20 Jahre lang mit dem Schlusse eines jeden Jahrs eine jährlich gleich große Rente bezieht und mit der Zahlung der letzten Rente das Capital aufgezehrt sein soll. Wie groß wird diese Rente sein?

Antw. 735,8 $\mathfrak{P}$.

Beispiel 2. Jemand besitzt ein Vermögen von 40000 $\mathfrak{P}$, welches 5 Procent Zinsen trägt, gebraucht aber zu seinem jährlichen Unterhalte mit dem Schlusse eines jeden Jahrs 3500 $\mathfrak{P}$. Wann wird er sein Vermögen aufgezehrt haben?

Antw. Nach 17,4 Jahren.

Diese Beispiele können ebenfalls leicht mit Hülfe der Rententafel des vorigen Paragraphen berechnet werden.

Anmerkung. Wenn in der Gleichung (1.) des vorigen Paragraphen der Discontfuß ϱ oder in der Gleichung (2.) der Zinsfuß r

als Unbekannte angesehen und die Gleichung für diese Unbekannte aufgelöst werden soll, so gelangt man zu einer Gleichung höheren Grades, die hier noch nicht behandelt werden kann. Deshalb mußte dieser Fall in dem vorstehenden Lehrsatze ausgeschlossen bleiben. Man kann indessen in Aufgaben, welche auf die gedachte Unbekannte führen, mit Hülfe einer Rententafel immer die gesuchte Unbekannte zwischen zwei so nahe Grenzen schließen, daß damit den Bedürfnissen der Praxis vollkommen Genüge geschieht.

Beispiel. Jemand kauft für ein Capital von 1000 ℛ eine Rente, welche 12 Jahre lang am Schlusse jedes Jahrs mit 110 ℛ ausbezahlt wird. Zu wie viel Procent wurde die Verzinsung des Capitals gerechnet?

Antw. Etwas über $4\frac{1}{2}$ Procent.

§. 71.

Lehrsatz. Der gegenwärtige Werth R einer ewigen Rente, welche jährlich b beträgt und von heute an mit dem Schlusse eines jeden folgenden Jahrs fällig ist, beträgt zum Discontfuß ϱ oder Zinsfuß r gerechnet

$$R = \frac{b\varrho}{1-\varrho} \quad \text{oder} \quad R = \frac{b}{r-1}.$$

Der Beweis ergiebt sich, indem man in der Gleichung (1.) oder (2.) des §. 69 die Annahme macht $n = \infty$.

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt

$$R(r-1) = b$$

woraus man sieht, daß der Werth von R nichts anderes ist als dasjenige Capital, dessen einjährliche Zinsen zum Zinsfuße r den Betrag b geben (§. 62). Die Zinseszinsrechnung führt also hier zu der Grundvoraussetzung zurück, auf welcher alle Verzinsung beruht. Denn diese Grundvoraussetzung besteht in der volkswirthschaftlichen Thatsache, daß der Besitz eines Capitals und der Besitz einer ewigen Rente in dem obigen Sinne, deren jährlicher Betrag den einjährlichen Zinsen jenes Capitals gleich ist, für identisch gelten und jederzeit der eine Besitz in den anderen am Geldmarkte umgesetzt werden kann, sobald über den Zinsfuß die erforderliche Vereinbarung getroffen ist.

Eine Anwendung der obigen Rechnung findet in den sogenannten Expropriationen statt, wie in dem folgenden

Beispiel. Jemand soll ein Grundstück abtreten, welches ihm jährlich mit dem Schlusse jedes Jahrs einen Ertrag von 200 ₰ liefert. Welches Entschädigungs=Capital muß ihm dafür geboten werden zu $3\frac{1}{2}$ Procent? zu 4 Procent?

Antw. Zu $3\frac{1}{2}$ Procent 5714,3 ₰; zu 4 Procent 5000 ₰.

§. 72.

Zusatz. Wird der Werth der Rente §. 69 für einen anderen, um ein oder mehrere Jahre vorwärts oder rückwärts gelegenen Zeitpunkt gesucht, so muß man den obigen Werth von R mit der entsprechenden Potenz von r oder ϱ multipliciren.

Die Umrechnung des Werthes einer Rente auf einen beliebigen anderen Zeitpunkt ist hiernach immer eine sehr leichte Operation. Die hauptsächlich vorkommenden Fälle dieser Art sind die folgenden.

1) Um den Werth einer $n$jährigen Rente für den Zeitpunkt zu finden, wo der jährliche Betrag b der Rente zum letzten Mal fällig ist, muß man den Werth R in §. 69 mit r^n multipliciren. Dies giebt

$$R' = \frac{b}{\varrho^{n-1}} \cdot \frac{1-\varrho^n}{1-\varrho} \quad \text{oder} \quad R' = b \cdot \frac{r^n-1}{r-1}. \qquad (1.)$$

2) Um den Werth einer $n$jährigen Rente für den Zeitpunkt zu finden, wo der jährliche Betrag b der Rente zum ersten Mal fällig ist, muß man den Werth R in §. 69 mit r multipliciren. Dies giebt

$$R'' = b\,\frac{1-\varrho^n}{1-\varrho} \quad \text{oder} \quad R'' = \frac{b}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n-1}{r-1}. \qquad (2.)$$

Insbesondere folgt hieraus für den gegenwärtigen Werth einer ewigen Rente, welche von heute an mit dem Anfange eines jeden Jahrs fällig ist (vergl. §. 71)

$$R'' = \frac{b}{1-\varrho} \quad \text{oder} \quad R'' = \frac{br}{r-1}. \qquad (3.)$$

3) Um den Werth einer $n$jährigen Rente für den Zeitpunkt zu finden, wo der jährliche Betrag b der Rente erst nach k Jahren

zum ersten Mal fällig ist (aufgeschobene Rente), muß man den Werth R in §. 69 mit ϱ^{k-1} multipliciren. Dies giebt

$$R'' = b\varrho^k \frac{1-\varrho^n}{1-\varrho} \quad \text{oder} \quad R'' = \frac{b}{r^{k+n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r-1}. \qquad (4.)$$

Alle diese Gleichungen können auch, wie es im §. 70 mit den Gleichungen des §. 69 geschehen ist, sowohl für b als auch für n als Unbekannte aufgelöst werden, was jedoch hier nicht ausgeführt werden soll.

Beispiel 1. Jemand vermehrt sein Vermögen von 20000 ℔, welches zu $4\frac{1}{2}$ Procent ausgeliehen ist, mit dem Schlusse eines jeden Jahrs um 800 ℔. Wie reich wird er nach 9 Jahren sein?

Antw. 38364 ℔.

Beispiel 2. Jemand besitzt ein Vermögen von 43500 ℔, welches 5 Procent Zinsen trägt, gebraucht aber zu seinem jährlichen Unterhalte mit dem Anfange eines jeden Jahrs 3500 ℔. Wann wird er sein Vermögen aufgezehrt haben?

Antw. siehe §. 70 Beispiel 2.

Beispiel 3. Ein Forstbestand, welcher noch 50 Jahre geschont werden muß, soll von da an binnen 10 Jahren abgetrieben werden und wird während dieser Zeit mit dem Schlusse eines jeden Jahrs einen Ertrag von 1000 ℔ liefern. Was ist dieser Bestand jetzt werth, wenn man die Verzinsung zu 4 Procent rechnet?

Antw. 1141,3 ℔.

§. 73.

Zusatz. Wird der jährliche Betrag b einer Rente nicht in Einer Summe, sondern in Theilen an gegebenen Terminen im Laufe des Jahrs bezahlt, so kann man, um den Werth dieser Rente zu finden, zuerst den Werth der Rentenzahlungen eines Jahrs entweder für den Anfang oder für das Ende dieses Jahrs berechnen und den so gefundenen Betrag alsdann wie eine nach vollen Jahren fällige Rente betrachten.

Am gewöhnlichsten ist der Fall, wo der jährliche Betrag b der Rente in m gleichen Theilen in Zeiträumen von je $\frac{1}{m}$ [illegible]

bezahlt wird. Nimmt man an, 1) daß die Zahlungen **auf den** Schluß dieser Zeiträume fallen, und versteht unter B **den Werth** der Rentenzahlungen eines Jahrs, auf den Anfang **dieses Jahrs** bezogen, so hat man mit dem Discontfuße ϱ

$$B = \frac{b}{m}\left(\varrho^{\frac{1}{m}} + \varrho^{\frac{2}{m}} + \varrho^{\frac{3}{m}} + \ldots \varrho^{\frac{m}{m}}\right)$$

d. i.

$$B = \frac{b}{m}\cdot\varrho^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{1-\varrho}{1-\varrho^{\frac{1}{m}}}$$

oder durch den Zinsfuß r ausgedrückt

$$B = \frac{b}{m}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{r-1}{r^{\frac{1}{m}}-1} \qquad (1.)$$

Nimmt man dagegen an, 2) daß die Zahlungen auf den **Anfang** der gedachten Zeiträume fallen, und versteht unter B' **den** Werth der Rentenzahlungen eines Jahrs, auf den Anfang **dieses** Jahrs bezogen, so wird mit dem Discontfuße ϱ

$$B' = \frac{b}{m}\left(1 + \varrho^{\frac{1}{m}} + \varrho^{\frac{2}{m}} + \ldots \varrho^{\frac{m-1}{m}}\right)$$

d. i.

$$B' = \frac{b}{m}\cdot\frac{1-\varrho}{1-\varrho^{\frac{1}{m}}}$$

oder durch den Zinsfuß r ausgedrückt.

$$B' = \frac{b}{m}\cdot\frac{1}{r^{\frac{m-1}{m}}}\cdot\frac{r-1}{r^{\frac{1}{m}}-1}. \qquad (2.)$$

Soll der Werth der Rentenzahlungen eines Jahrs **nicht auf den** Anfang, sondern auf den Schluß dieses Jahrs **bezogen werden, so** hat man die vorstehend ge undenen Werthe mit r zu **multipliciren.** Also erhält man im ersten Falle

$$B = \frac{b}{m}\cdot\frac{r-1}{r^{\frac{1}{m}}-1} \qquad (3.)$$

und im zweiten Falle

$$B' = \frac{b}{m}\cdot r^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{r-1}{r^{\frac{1}{m}}-1}. \qquad (4.)$$

Diese Werthe von B oder B' müssen sodann, um den definitiven Werth der eine Reihe von Jahren laufenden Rente zu geben, in den früheren Gleichungen an die Stelle von b gesetzt werden.

Beispiel. Die Rente des Beispiels §. 69 soll vierteljährlich mit 60 ₰ am Schlusse eines jeden Vierteljahrs gezahlt werden. Welche Capitalzahlung ist für diese Rente zu leisten?

Antw. Aus der Gleichung (3.) folgt $B = 243{,}6$ ₰ und wenn man diesen Werth an die Stelle von b in §. 69 einsetzt, so erhält man $R = 2708{,}2$ ₰.

§. 74.

Lehrsatz. Eine Rente, deren jährliche Beträge in unendlich kleinen Zeit-Intervallen gleichmäßig über das ganze Jahr sich vertheilen, ist an Werth sehr nahe einer Rente gleich, deren jährliche Beträge in Einer Summe in der Mitte des Jahrs fällig sind.

Beweis. Wenn man in der Gleichung (1.) oder auch (2.) des vorigen Paragraphen die Zeiträume, welche die einzelnen Zahlungen von einander trennen, unendlich klein nimmt, d. h. m unendlich groß werden läßt, so wird daraus

$$B = b \cdot \frac{r-1}{r} \cdot \lim \frac{\frac{1}{m}}{r^{\frac{1}{m}} - 1}$$

wo das Zeichen lim sich auf das unendliche Zunehmen von m bezieht. Nun ist r ein Binomium von der Form $1 + x$, wo x einen kleinen Bruch bedeutet. Man kann also den Werth dieser Grenze aus §. 55 entnehmen und erhält

$$B = b \cdot \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\log e}{\log r} \qquad (1.)$$

wo die Logarithmen im Zähler und Nenner für einerlei, jedoch beliebige Basis zu nehmen sind.

Wenn dagegen die jährlichen Beträge b einer Rente in Einer Summe in der Mitte des Jahrs gezahlt werden, so hat man als Werth dieser Zahlungen im Anfange jedes Jahrs

$$B = b\varrho^{\frac{1}{2}} \quad \text{d. i.} = \frac{b}{r^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.)$$

Um diese beiden Ausdrücke vergleichen zu können, substituire man für r den angezeigten Werth $1+x$ und entwickele darauf beide Ausdrücke in Reihen, welche nach der Hauptzahl x geordnet sind. Dann erhält man aus (1.)

$$B = b \cdot \frac{x}{(1+x)\, l(1+x)} = b\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}x^2 \ldots\right)$$

und aus (2.)

$$B = b\,.\,(1+x)^{-\frac{1}{2}} = b\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \ldots\right)$$

also beträgt der Unterschied beider Werthe von B nur

$$\frac{b x^2}{24} + \ldots$$

welcher in der Regel vernachlässigt werden kann. Denn für $r = 1{,}05$, wo man also hat $x = 0{,}05$, nimmt dieser Unterschied nur den Werth $0{,}0001\,.\,b$ an und für kleinere Zinsfuße wird er noch weniger betragen.

Beispiel. Die Rente des Beispiels §§. 69 und 73 soll an die Bedingung geknüpft werden, daß der Empfänger derselben die Befugniß haben will, jeden Tag und jede Stunde den diesem Tage und dieser Stunde entsprechenden Theil des jährlichen Betrages der Rente heben zu können. Welche Capitalzahlung ist für diese Rente zu leisten?

Antw. Die genaue Rechnung nach (1.) giebt 2721,4 ℛ︎, die angenäherte nach (2.) dagegen 2721,2 ℛ︎.

§. 75.

Lehrsatz. Der gegenwärtige Werth R einer ewigen Rente von dem Betrage b, welcher zum ersten Male nach k Jahren und von da in regelmäßiger Wiederkehr nach je n Jahren fällig ist, beträgt durch den Discontfuß ϱ ausgedrückt

$$R = b \cdot \frac{\varrho^k}{1-\varrho^n}$$

oder durch den Zinsfuß r ausgedrückt

$$R = b \cdot \frac{r^{n-k}}{r^n - 1}.$$

Beweis. Wenn man sämmtliche Beträge b der Rente auf die Gegenwart discontirt, so erhält man

$$R = b\varrho^k + b\varrho^{k+n} + b\varrho^{k+2n} + \ldots \text{ in inf.}$$

woraus durch Summirung der geometrischen Progression die obigen Ausdrücke hervorgehen.

Beispiel. Ein Gebäude, dessen Bauwerth 10000 ℳ beträgt, muß zum ersten Mal nach 30 Jahren und von da nach je 80 Jahren neu gebauet werden. a) Durch welches Capital, b) durch welche jährliche, im Anfange jedes Jahrs zahlbare ewige Rente kann, zu 4 Procent gerechnet, diese Bauverpflichtung abgelöst werden?

Antw. a) 3223 ℳ. b) 124 ℳ.

Ueber den Gegenstand dieses Beispiels, welcher in der Praxis noch verschiedene besondere Bestimmungen erfahren kann, sehe man die Schrift des Verfassers: Ueber die Berechnung der Ablösung von Bauverpflichtungen, Hannover 1861.

Amortisationen.

§. 76.

Erklärung. Unter Amortisation einer Capitalschuld versteht man die Tilgung dieser Schuld sammt deren fälligen Zinsen durch eine jährlich sich gleich bleibende Rente, welche mit dem Schlusse jedes Jahrs gezahlt wird und nach einer gewissen Reihe von Jahren abläuft.

Der Amortisationsfuß ist derjenige Zinsfuß, durch welchen man aus dem gegebenen Capitale den jährlichen Betrag dieser Tilgungsrente ableitet.

Es sei a das gegebene Capital und r der Zinsfuß, zu welchem dasselbe verzinst wird, also $a(r-1)$ der Betrag seiner einjährlichen Zinsen.

Ferner sei r' der Amortisationsfuß, also $a(r'-1)$ der jährliche Betrag der Tilgungsrente. Die Dauer dieser Rente betrage n Jahre.

Setzt man in der Gleichung §. 69 (2.) statt R und b beziehungsweise die Werthe a und $a(r'-1)$, so geht dieselbe über in

$$1 = \frac{r'-1}{r-1} \cdot \frac{r^n-1}{r^n}.$$

Hier ist a verschwunden und diese Gleichung stellt demnach ei bei jeder Amortisation stattfindende Beziehung zwischen den Größ r, r' und n dar, welche von dem Werthe des Capitals unal hängig ist.

Wie diese Gleichung zeigt, aber auch aus der Natur der Sac folgt, muß immer $r' > r$ sein. Die Differenz $r' - r$ kann m den Zuschlag für Amortisation nennen.

§. 77.

Lehrsatz. Aus dem gegebenen Zinsfuße r und dem g gebenen Amortisationsfuße r' der Tilgungsrente erhält m die Dauer n der Tilgungsrente durch die Gleichung

$$n = \frac{\log (r' - 1) - \log (r' - r)}{\log r}. \qquad (1.$$

Und aus dem gegebenen Zinsfuße r und der gegeben Dauer n der Tilgungsrente erhält man den Amortisation fuß r' durch die Gleichung

$$r' = \frac{r^{n+1} - 1}{r^n - 1} \qquad (2.$$

oder den Zuschlag für Amortisation $r' - r$ durch Gleichung

$$r' - r = \frac{r - 1}{r^n - 1}. \qquad (3.$$

Der Beweis ergiebt sich durch Auflösung der Gleichung d vorigen Paragraphen für n oder r'.

Beispiel 1. Eine Staatsanleihe, welche mit 4 Procent verzin wird, soll durch einen Zuschlag von $1\frac{1}{2}$ Procent amortisirt werde In wie viel Jahren wird die Schuld getilgt sein?

Antw. $n = 33{,}13$ Jahr.

Beispiel 2. Eine Schuld, welche mit 4 Procent verzinst wir soll durch eine 20 Jahre laufende Rente amortisirt werden. W hoch muß der Amortisationsfuß sein?

Antw. $r' = 1{,}0736$ oder 3,36 Procent Zuschlag.

Anmerkung. Sollen die Zahlungen halbjährlich geschehen, ist dies in der Regel so zu verstehen, daß halbjährlich die Häl

der dem jährlichen Zinsfuße entsprechenden Zinsen zur Casse kommen soll. Es treten also hier die Bestimmungen der Anmerkung zu §. 64 in Kraft, oder man hat statt r und r' beziehungsweise zu setzen

$$\left(1+\frac{r-1}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(1+\frac{r'-1}{2}\right)^2.$$

So wird bei halbjährlichen Zahlungen die Antwort im Beispiel 1. lauten $n = 32{,}56$ Jahr, und im Beispiel 2. $r' = 1{,}0725$.

§. 78.

Lehrsatz. In der Amortisation einer Capitalschuld a, welcher der Zinsfuß r und der Amortisationsfuß r' zum Grunde liegen, hat nach k Jahren, d. h. nachdem $k$mal die Tilgungsrente bezahlt ist, der Rest der Capitalschuld, welcher a' sei, den Werth

$$a' = a - \frac{a(r'-r)}{r-1}(r^k - 1).$$

Beweis. Das Capital a hat nach k Jahren nach §. 63 den Werth

$$a r^k.$$

Die durch k Jahre gezahlte Tilgungsrente $a(r'-1)$ hat nach k Jahren nach §. 72 (1.) den Werth

$$\frac{a(r'-1)}{r-1}(r^k - 1).$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke giebt den nach k Jahren bleibenden Rest a' der Capitalschuld, also

$$\begin{aligned} a' &= a r^k - \frac{a(r'-1)}{r-1}(r^k - 1) \\ &= a r^k - a\left(1+\frac{r'-r}{r-1}\right)(r^k - 1) \\ &= a - \frac{a(r'-r)}{r-1}(r^k - 1) \end{aligned}$$

wie oben.

Beispiel. In dem Beispiele 1 des vorigen Paragraphen beträgt, wenn man die ursprüngliche Capitalschuld $a = 1000000$ ₰ setzt, der Rest der Capitalschuld nach 30 Jahren $a' = 158726$ ₰.

Setzt man in der obigen Gleichung $a' = 0$, so geht gleichzeitig k in n über, und die Auflösung dieser Gleichung liefert sodann genau wieder die Werthe (1.) und (2.) des vorigen Paragraphen.

§. 79.

Lehrsatz. In jeder Amortisation bilden die successiven Capital-Abtragungen eine geometrische Progression, deren Glieder von Jahr zu Jahr um ihre eigenen Zinsen wachsen.

Diese geometrische Progression ist

$$a(r'-r),\ a(r'-r)r,\ a(r'-r)r^2,\ a(r'-r)r^3,\ \ldots\ a(r'-r)r^{n-1}$$

Beweis. Wenn man die Bezeichnung des vorigen Paragraphen beibehält, so kann man die Tilgungsrente $a(r'-1)$ in jedem Jahre in zwei Theile zerlegen, von denen der erste zur Verzinsung des Capitalrests aus dem Vorjahre, und mithin der zweite zur Capital-Abtragung verwandt wird. Der erste dieser Theile wird nach der Natur der Sache von Jahr zu Jahr abnehmen, und mithin der zweite zunehmen.

Nun fordert der Capitalrest a' nach k Jahren eine Verzinsung von $a'(r-1)$ nach $k+1$ Jahren. Also wird zur Capital-Abtragung nach $k+1$ Jahren verwandt

$$a(r'-1) - a'(r-1)$$

welcher Ausdruck durch Substitution des Werths von a' aus dem vorigen Paragraphen sich zusammenzieht in

$$a(r'-r)r^k.$$

Setzt man hierin für k der Reihe nach $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$, so entsteht die oben angezeigte geometrische Progression.

Die beiden vorstehenden Lehrsätze können angewandt werden, um den sogenannten Tilgungsplan einer vorzunehmenden Amortisation zu entwerfen. Die folgende Ausführung, anknüpfend an das in den beiden letzten Paragraphen behandelte Beispiel, kann zur Erläuterung dienen.

Tilgungsplan einer Anleihe von 1000000 ₰,
welche mit 4 Procent verzinst und mit $1\frac{1}{2}$ Procent Zuschlag amortisirt werden soll.

Nach Jahren	Die Tilgungsrente 55000 ₰ giebt zur Verzinsung	zur Capital-Abtragung	Rest der Capitalschuld
1	40000 ₰	15000 ₰	985000 ₰
2	39400 „	15600 „	969400 „
3	38776 „	16224 „	953176 „
4	38127 „	16873 „	936303 „
5	37452 „	17548 „	918755 „
⋮			
30	8220 „	46780 „	158726 „
31	6349 „	48651 „	110075 „
32	4403 „	50597 „	59478 „
33	2379 „	52621 „	6857 „

Der letzte Rest von 6857 ₰, welcher weniger beträgt als die jährliche Tilgungsrente 55000 ₰, fällt außerhalb der Regel und kann entweder sofort, oder einschließlich seiner einjährlichen Zinsen nach einem Jahre getilgt werden.

Sechster Abschnitt.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von der Wahrscheinlichkeit der Ereignisse.

§. 80.

Erklärung. Unter der Wahrscheinlichkeit eines bevorstehenden, vom Zufall abhängigen Ereignisses versteht man einen Bruch, dessen Zähler die Anzahl aller günstigen

Fälle, welche dieses Ereigniß herbeiführen, und dessen Nenner die Anzahl aller möglichen Fälle derselben Gattung ist.

Es seien unter n möglichen Fällen irgend einer Gattung a günstige Fälle, welche ein gewisses Ereigniß herbeiführen, und mit w werde die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses bezeichnet. Dann hat man vermöge dieser Erklärung

$$w = \frac{a}{n}.$$

Es seien ferner unter jenen n möglichen Fällen b ungünstige Fälle, welche das Gegentheil des verlangten Ereignisses herbeiführen, so daß also $a + b = n$ ist. Dann hat man

$$1 - w = \frac{b}{n}$$

als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils. Die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten ist jederzeit $= 1$, d. h. Gewißheit.

Die möglichen Fälle werden hier sämmtlich als gleich möglich vorausgesetzt, d. h. es wird angenommen, daß nicht einer derselben mit größerer Leichtigkeit als ein anderer eintreten kann. Auch müssen sie unabhängig von einander sein, d. h. es darf nicht das Eintreten eines derselben auf das Eintreten eines andern einen Einfluß üben.

Beispiele. 1. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel die Zahl Eins (oder irgend eine andere Zahl) zu werfen, ist $\frac{1}{6}$.

2. Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, welche 5 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, eine weiße Kugel zu ziehen, ist $\frac{5}{7}$.

3. Die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 52 Karten eine Figur zu ziehen, ist $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

Anmerkung. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist eine Erfindung der Mathematiker Pascal und Fermat, und aus Anlaß eines Spiels um das Jahr 1650 entstanden. Doch wird sich unten zeigen, daß sie auch ernsthafter Anwendungen fähig ist.

Im täglichen Leben nennt man „wahrscheinlich“ solche Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit nahe an 1 beträgt, dagegen „unwahr-

scheinlich" solche Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit sehr klein ist. Dieser Sprachgebrauch muß hier ferngehalten werden.

§. 81.

Zusatz. Zur Bestimmung der Anzahl der möglichen, wie der günstigen Fälle muß man in zusammengesetzteren ufgaben die Combinationslehre zu Hülfe nehmen.

Einige Beispiele mögen dies erläutern.

Beispiel 1. Jemand will aus einer Urne, welche 5 weiße und schwarze Kugeln enthält, drei Kugeln zugleich ziehen. Wie groß die Wahrscheinlichkeit, daß alle drei Kugeln weiße sein werden?

Auflösung. Die Anzahl der Combinationen ohne Wieder-lung zu je 3 aus allen 7 Kugeln beträgt $\frac{7\ 6.5}{1.2\cdot 3} = 35$, dagegen us den 5 weißen Kugeln $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$. Also ist die gesuchte Wahr-heinlichkeit $= \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$.

Beispiel 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln vei gleiche, und zwar nur zwei gleiche Zahlen zu werfen?

Auflösung. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung us 6 Elementen zu je 3 ist $6^3 = 216$. Ferner geben je 2 Würfel Würfe von zwei gleichen Zahlen, also geben 3 Würfel $6.\frac{3.2}{1.2}$ $= 18$ Würfe von zwei gleichen Zahlen, und wenn man jedem iefer Würfe die dritte ungleiche Zahl hinzufügt, so erhält man $8.5 = 90$ Würfe, in denen irgend zwei von den drei Würfeln leiche Zahlen zeigen. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$.

Beispiel 3. Die Zahlenlotterie besteht aus 90 Nummern, von denen 5 als Treffer gezogen werden. Wenn nun Jemand 12 Nummern besetzt, wie groß ist seine Wahrscheinlichkeit, eine Ambe zu gewinnen, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß gerade zwei von den besetzten Nummern gezogen werden?

Auflösung. Die Anzahl aller möglichen Ziehungen ist $= \frac{90.89.88.87.86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$. Die Anzahl der günstigen Ziehungen erhält man, wenn man aus den nicht besetzten 78 Nummern alle Combinationen zu je 3 bildet $= \frac{78.77.76}{1.\ 2.\ 3}$ und einer jeden dieser Complexionen alle Combinationen aus den besetzten 12 Nummern zu je 2 anhängt $= \frac{12.11}{1.\ 2}$, sie ist also $= \frac{78.77.76}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{12.11}{1.\ 2}$. Demnach wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{38038}{332949} = 0{,}11425$.

Anmerkung. Es kann vorkommen, daß die Zahlen der möglichen und der günstigen Fälle nicht durch unmittelbares Abzählen sich finden lassen, sondern nach ihrer relativen Größe durch Linien, Flächen ꝛc. dargestellt werden. Dahin gehören Beispiele wie die folgenden:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn man in einem gegebenen Dreiecke in willkürlicher Höhe eine Parallele zur Grundlinie zieht, das dadurch abgeschnittene Dreieck weniger als die Hälfte des gegebenen betragen werde?

Antw. $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707$.

2. Wenn man einem gegebenen Quadrate ein Quadrat einschreibt, dessen Ecken in die Mitten der Seiten des vorigen fallen; diesem wieder auf dieselbe Weise ein zweites Quadrat u. s. w.: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein in das gegebene Quadrat willkürlich geworfener Punkt innerhalb des $m$ten eingeschriebenen Quadrats fallen werde?

Antw. $\left(\frac{1}{2}\right)^m$.

§. 82.

Lehrsatz. Wenn die Wahrscheinlichkeiten mehrerer von einander unabhängigen Ereignisse einzeln gegeben sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend eins von diesen Ereignissen eintrete, gleich ihrer Summe.

Oder wenn w, w', w'' 2c. die Wahrscheinlichkeiten mehrerer von einander unabhängigen Ereignisse sind, so ist die Wahrscheinlichkeit W, daß irgend eines dieser Ereignisse eintrete

$$W = w + w' + w'' + \ldots$$

Beweis. Wenn die Brüche, welche die Wahrscheinlichkeiten w, w', w'' 2c. ausdrücken, gleiche Nenner haben, so ist unmittelbar klar, daß die Summe ihrer Zähler die Anzahl aller derjenigen Fälle angiebt, in welchen irgend eines der Ereignisse eintreten kann.

Wenn dagegen diese Brüche ungleiche Nenner haben, so wird dadurch, daß man sie auf gleiche Nenner bringt, zunächst bewirkt, daß die in den Nennern gezählten möglichen Fälle sämmtlich gleich möglich werden (§. 80), worauf das Uebrige wie vorhin folgt.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln wenigstens zwei gleiche Zahlen zu werfen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für zwei gleiche Zahlen (§. 81) ist $\frac{90}{216}$, für drei gleiche Zahlen findet sie sich unmittelbar $= \frac{6}{216}$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{90}{216} + \frac{6}{216} = \frac{4}{9}$.

Beispiel 2. Wie groß ist in der Zahlenlotterie unter den Voraussetzungen des Beispiels 3, §. 81, die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens zwei von den besetzten Nummern gezogen werden?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit für zwei der besetzten Nummern (§. 81) ist $= 0{,}11425$, für eine der besetzten Nummern findet man sie ebenso $= 0{,}38946$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= 0{,}5037$.

Beispiel 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Haufen von m Kugeln, in welchen man zufällig greift, eine gerade oder eine ungerade Zahl zu ziehen?

Auflösung. Die geraden Zahlen sind die Combinationen aus m Elementen zu je 2, 4, 6 2c., und die ungeraden Zahlen die Combinationen aus denselben Elementen zu je 1, 3, 5 2c. Demnach wird die Wahrscheinlichkeit für gerade

$$= \frac{\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots}{m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots}$$

und die Wahrscheinlichkeit für ungerade

$$= \frac{m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots}{m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots}$$

In den Zählern und Nennern dieser beiden Brüche sind aber alle Binomial-Coefficienten der $m$ten Potenz mit alleiniger Ausnahme des ersten Coefficienten 1 enthalten. Also wird nach §. 36 die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\text{für gerade} = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1}, \text{ und für ungerade} = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1}$$

Z. B. mit 6 Kugeln wird die Wahrscheinlichkeit für gerade $= \frac{31}{63}$, für ungerade $= \frac{32}{63}$.

§. 83.

Lehrsatz. Wenn die Wahrscheinlichkeiten mehrerer von einander unabhängigen Ereignisse einzeln gegeben sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle diese Ereignisse zusammen eintreten, gleich ihrem Producte.

Oder wenn w, w', w'' rc. die Wahrscheinlichkeiten mehrerer von einander unabhängigen Ereignisse sind, so ist die Wahrscheinlichkeit W, daß alle diese Ereignisse zusammen eintreten

$$W = w \cdot w' \cdot w'' \ldots$$

Beweis. Man setze, mit der Bezeichnung des §. 80, $w = \frac{a}{n}$ und $w' = \frac{a'}{n'}$. Dann wird es unter je n möglichen Fällen a Fälle geben, in denen das erste Ereigniß eintritt; folglich unter je nn' möglichen Fällen an' Fälle, in denen dasselbe Ereigniß eintritt. Aber unter je n' möglichen Fällen giebt es a' Fälle, in denen das zweite Ereigniß eintritt; folglich unter an' möglichen Fällen aa' Fälle, in

denen dieses zweite Ereigniß eintritt. Mithin werden unter je nn' möglichen Fällen aa' Fälle enthalten sein, in denen beide Ereignisse zusammen eintreten, oder die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse ist $= \frac{aa'}{nn'} = w \cdot w'$.

Ebenso kann man fortfahren, indem man das dritte ꝛc. Ereigniß hinzuzieht.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, welche 5 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, zuerst eine weiße und darauf, nachdem diese wieder hineingelegt worden ist, eine schwarze Kugel zu ziehen?

Antw. $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{10}{49}$.

Beispiel 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel zuerst dreimal nacheinander dieselbe bestimmte Zahl, z. B. Eins, und darauf zweimal eine von dieser verschiedene Zahl zu werfen?

Antw. $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{7776}$.

Beispiel 3. Wie oft muß mit zwei Würfeln geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, zwei Sechsen zu werfen, größer wird als die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils?

Antw. Aus $\left(\frac{35}{36}\right)^x < \frac{1}{2}$ folgt $x > 24{,}6$, also mindestens 25 mal. (Diese Aufgabe ist eine der ersten, welche Pascal und Fermat gelöst haben.)

Beispiel 4. Wenn bei einem angehenden Ehepaare die Wahrscheinlichkeit des Mannes, nach 25 Jahren noch zu leben, $= \frac{2}{3}$ und die Wahrscheinlichkeit der Frau, nach 25 Jahren noch zu leben, $= \frac{3}{4}$ ist: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ehepaar seine silberne Hochzeit erleben wird? oder daß bis dahin der Mann Witwer? oder die Frau Witwe sein wird?

Antw. 1) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

§. 84.

Zusatz. Wenn zwei Ereignisse von einander abhängig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit W des Zusammentreffens beider gleich dem Producte aus der Wahrscheinlichkeit w des ersten Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit w', daß nach dem Eintritte des ersten auch das zweite eintreten werde.

Oder man hat auch hier

$$W = w \, . \, w'.$$

Denn für diesen Fall gilt noch vollständig der Beweis des vorigen Paragraphen.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, welche 5 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, zuerst eine weiße und darauf, ohne daß diese wieder hineingelegt wird, eine schwarze Kugel zu ziehen?

Antw. $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{21}$.

Beispiel 2. Wenn eine Thatsache von Mund zu Mund durch 12 Personen sich fortpflanzt und für jede dieser Personen die Wahrscheinlichkeit, daß sie das Vernommene treu weiter berichte, $= 0{,}9$ gesetzt wird: wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß der Bericht der letzten Person wahr sei?

Antw. $(0{,}9)^{12} = 0{,}2824$ oder beinahe $\frac{2}{7}$.

Anmerkung. Es kann geschehen, daß in der Gleichung $W = w \, . \, w'$ einer der beiden Factoren w, w' die zu suchende Unbekannte ist, so daß man zu setzen hat

$$w = \frac{W}{w'} \quad \text{oder} \quad w' = \frac{W}{w}.$$

Wenn z. B. die Wahrscheinlichkeit einer 30jährigen Person, na[illegible] Jahren noch zu leben, $= 0{,}937$ und die Wahrscheinlichkeit de[illegible] geben Person, nach 7 Jahren noch zu leben, $= 0{,}926$ ist, so fol[illegible] Wahrscheinlichkeit einer 36jährigen Person, nach eine[illegible] zu leben, $= \frac{0{,}926}{0{,}937} = 0{,}988$.

Das Gesetz der großen Zahlen.

§. 85.

Lehrsatz. Die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Reihe von m Versuchen derselben Art ein gewisses Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $= w$ sei, $r$mal eintrete, wird durch das $r$te Glied der Entwickelung der $m$ten Potenz des Binomii $(1 - w) + w$ ausgedrückt.

Oder wenn man diese Wahrscheinlichkeit mit W bezeichnet, so ist

$$W = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}\, w^r\,(1-w)^{m-r}.$$

Beweis. Soll das verlangte Ereigniß in einer vorgeschriebenen Reihefolge $r$mal eintreten und $m-r$mal nicht eintreten, so ist nach §. 83 die Wahrscheinlichkeit, daß dies geschehe, $= w^r\,(1-w)^{m-r}$. Wenn aber die Reihefolge der Ereignisse willkürlich bleibt, so muß dieses Resultat noch so oft wie möglich permutirt werden, wodurch nach §. 34 der obige Ausdruck entsteht.

Man kann diesem Lehrsatze nach §. 82 sogleich hinzufügen, daß wenn das verlangte Ereigniß wenigstens $r$mal und höchstens r'mal eintreten soll, die betreffende Wahrscheinlichkeit durch die Summe aller Glieder vom $r$ten bis zum r'ten der obigen Binomial-Entwickelung gegeben wird. Die Summe aller Glieder dieser Entwickelung vom Anfange bis zu ihrem letzten Gliede beträgt 1, oder ist Gewißheit, wie es auch sein muß.

Beispiel 1. Aus einer Urne, welche 5 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, wird 12 mal nach einander eine Kugel gezogen und wieder hineingelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den gezogenen Kugeln 9 mal sich eine weiße befinde?

Antw. Das 9. Glied der Entwickelung von $\left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\right)^{12}$ d. i. 0,2483.

Beispiel 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 20 Personen, deren jede eine Wahrscheinlichkeit $= \frac{2}{3}$ hat, nach einer gewissen Reihe von Jahren noch am Leben zu sein, nach dieser Zeit noch 16 Personen leben?

Antw. Das 16. Glied der Entwickelung von $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$ d. i. 0,0911.

Beispiel 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von [...] 20 Personen des vorigen Beispiels nach derselben Zeit noch weni[gs]tens zwei am Leben sind?

Antwort. Die Summe aller Glieder der Entwickelung [v]on $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{20}$ mit Ausnahme der beiden Anfangsglieder, d. [i.]

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{20} - 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{19} = 0{,}999999988.$$

§. 86.

Lehrsatz. In einer großen Zahl wiederholter Versuch[e,] welche einzeln genommen ein gewisses Ereigniß mit ei[ner] gewissen Wahrscheinlichkeit w erwarten lassen, hat diejeni[ge] Anzahl von Wiederholungen dieses Ereignisses die größ[te] Wahrscheinlichkeit, deren Verhältniß zu der Gesammtz[ahl] der Versuche gleich der Wahrscheinlichkeit w dieses Erei[g]nisses ist.

Oder die Wahrscheinlichkeit W des vorigen Paragraphen erlan[gt,] wenn m eine große Zahl ist, ihren größten Werth, sobald r [der] Gleichung entspricht

$$w = \frac{r}{m}.$$

Beweis. Man betrachte in der Entwickelung der $m$ten Pot[enz] des Binomii $(1 - w) + w$ drei auf einander folgende Glie[der,] nämlich das $(r - 1)$te, $r$te und $(r + 1)$te, von denen das mittl[ere] mit dem Werthe von W des vorigen Paragraphen übereinstim[mt.] Damit aus dem $(r - 1)$ten Gliede das $r$te Glied hervorgehe, [hat] man ersteres zu multipliciren mit

$$\frac{m - r + 1}{r} \cdot \frac{w}{1 - w}$$

[u]nd damit aus dem $r$ten Gliede das $(r + 1)$te Glied hervorge[he,] [hat man] ersteres zu multipliciren mit

$$\frac{m - r}{r + 1} \cdot \frac{w}{1 - w}.$$

Soll nun das $r$te Glied ein Maximum sein in der Reihe aller Glieder, so muß es größer sein als das vorhergehende und das nachfolgende, oder man muß haben

$$\frac{m-r+1}{r}\cdot\frac{w}{1-w} > 1 \quad \text{und} \quad \frac{m-r}{r+1}\cdot\frac{w}{1-w} < 1$$

woraus folgt

$$w > \frac{r}{m+1} \quad \text{und} \quad w < \frac{r+1}{m+1}.$$

Stellen aber m und r große Zahlen vor, so kann man ohne bemerkbaren Fehler $+1$ neben ihnen weglassen, und diese beiden Ausdrücke reduciren sich alsdann auf den einzigen

$$w = \frac{r}{m}$$

wie oben behauptet wurde.

Der vorstehende Lehrsatz macht die Grundlage und den wesentlichen Theil des sogenannten Gesetzes der großen Zahlen aus, vermöge dessen man bei wiederholten Versuchen als den wahrscheinlichsten Erfolg immer den erwarten darf, in welchem die Anzahl der Wiederholungen eines verlangten Ereignisses proportional der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist, vorausgesetzt, daß die Zahl der Versuche groß angenommen wird. Es ist dabei gleichgültig, ob diese Versuche zeitlich auf einander folgen oder ob sie zugleich neben einander stattfinden, wenn nur in beiden Fällen die einzelnen Versuche unabhängig von einander bleiben. So wird z. B. ebensowohl wenn man mit einem Würfel 1200 mal nach einander, wie wenn man einmal mit 1200 Würfeln zugleich wirft, der wahrscheinlichste Erfolg der sein, daß jede der Zahlen Eins, Zwei, Drei rc. 200 mal erscheint, und jede andere Anzahl von Wiederholungen einer dieser sechs Zahlen kann nur mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit erwartet werden. Ebenso wenn man entweder aus einer Urne, welche 5 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, 1400 mal eine Kugel zieht und dieselbe nach jedem Zuge wieder hineinlegt, oder wenn aus 1400 Urnen derselben Art gleichzeitig je eine Kugel gezogen wird, darf man als den wahrscheinlichsten Erfolg immer den erwarten, daß unter den gezogenen Kugeln 1000 weiße und 400 schwarze enthalten sind, und jede andere Vertheilung der Kugeln

ist weniger wahrscheinlich. Man kann hinzusetzen, daß jeder von dem wahrscheinlichsten Erfolge verschiedene Erfolg desto weniger wahrscheinlich ist, je weiter er sich nach der einen oder der anderen Seite von dem wahrscheinlichsten Erfolge entfernt, was gleichfalls aus den obigen Formeln erkannt werden kann.

Um das Gesetz der großen Zahlen durch ein Experiment zu prüfen, ließ Quetelet aus einer Urne, welche gleich viel weiße und schwarze Kugeln enthielt, 4096 mal eine Kugel ziehen und dieselbe nach jedem Zuge wieder hineinlegen. Die Liste dieser Ziehungen ergab 2066 weiße und 2030 schwarze Kugeln, während der wahrscheinlichste Erfolg 2048 Kugeln jeder Art gefordert hätte (s. Lettres sur la théorie des probabilités par A. Quetelet, Bruxelles 1846).

Anmerkung. Das Gesetz der großen Zahlen ist in dem vorstehenden Lehrsatze nicht erschöpft, vielmehr gehört dazu noch der Nachweis, wie die zufälligen Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Erfolge mit zunehmender Zahl der Versuche in allmälig engere Grenzen eingeschlossen werden. Diesen Nachweis hat zuerst Jakob Bernoulli gegeben, nachdem er, wie er selbst erzählt, zwanzig Jahre darüber nachgedacht hatte (s. dessen Ars conjectandi, Basil. 1713, pag. 227). Gegenwärtig führt man diesen Nachweis am einfachsten aus den Grundlagen der Methode der kleinsten Quadrate, die hier nicht gegeben werden können (s. des Verf. Mathematische Statistik, Hannover 1867, Seite 10 u. 11).

§. 87.

Zusatz. Wenn in einer Reihe von m Versuchen, wo m eine große Zahl bedeutet, ein gewisses Ereigniß $r$mal wiedergekehrt ist, so stellt der Bruch $\frac{r}{m}$ einen angenäherten Werth der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses dar.

Man macht von diesem Satze, welcher unmittelbar aus dem vorigen Paragraphen folgt, in solchen Fällen Gebrauch, wo es nicht möglich ist, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses direct nach der Erklärung §. 80 zu bestimmen, weil die dazu nöthigen Data nicht gegeben sind, dagegen der Weg offen steht, das Eintreffen dieses Ereignisses in einer Reihe von Versuchen zu beobachten.

Beispiel 1. In dem Experiment von Quetelet (s. d. vorigen Paragraphen) waren in der Urne 80 Kugeln enthalten. Will man aus dem Erfolge der Ziehungen bestimmen, wie viel weiße Kugeln sich unter diesen befunden haben, so hat man als angenäherten Werth der Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, den Bruch $\frac{2066}{4096}$, folglich ist die Zahl der weißen Kugeln angenähert $= \frac{2066}{4096} \cdot 80 = 40{,}35$ und mithin, da sie nur eine ganze Zahl sein kann, $= 40$ zu setzen, was mit den Voraussetzungen des Experiments übereinstimmt.

Beispiel 2. In einer Versicherungs-Gesellschaft wurde beobachtet, daß von 1955 lebenden 50jährigen Personen nach einem Jahre noch 1928 Personen am Leben waren. Daraus folgt als angenäherter Werth der Wahrscheinlichkeit einer 50jährigen Person, nach einem Jahre noch zu leben, der Bruch $\frac{1928}{1955} = 0{,}9862$.

Erfahrungszahlen dieser letzteren Art werden in den sogenannten Mortalitätstafeln niedergelegt, welche gebraucht werden, um aus ihnen für Personen jedes Alters die Wahrscheinlichkeit, nach einem Jahre oder nach irgend einer Reihe von Jahren noch zu leben, zu entnehmen.

§. 88.

Lehrsatz. Wenn man durch wiederholte directe Messungen einer gewissen unbekannten Größe Resultate erhalten hat, welche in Folge der in ihnen enthaltenen zufälligen Beobachtungsfehler nicht unter einander übereinstimmen, so ist der wahrscheinlichste Werth dieser Größe gleich dem arithmetischen Mittel aus den Resultaten aller Messungen.

Oder wenn man durch $m$mal wiederholte Messung einer Größe x die Resultate a, a', a'' 2c. erhalten hat, so wird der wahrscheinlichste Werth dieser Größe durch die Gleichung gegeben

$$x = \frac{a + a' + a'' + \dots}{m}.$$

Beweis. Bezeichnet man die in den einzelnen Messungen enthaltenen unbekannten Beobachtungsfehler mit $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ 2c., unter denen

eben sowohl positive wie negative vorkommen können, so kann man setzen

$$a = x + \varepsilon$$
$$a' = x + \varepsilon'$$
$$a'' = x + \varepsilon''$$
$$\text{rc.}$$

Wie nun auch diese Beobachtungsfehler nach Größe und Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens näher zu bestimmen sein mögen, so folgt doch unmittelbar aus der Natur der Sache die eine Eigenschaft derselben, daß, da die Absicht der Messung auf die Wahrheit gerichtet ist, jeder Beobachtungsfehler eben so leicht positiv wie negativ muß eintreten können. Da aber nach dem Gesetze der großen Zahlen der wahrscheinlichste Erfolg wiederholter Messungen darin besteht, daß jeder Beobachtungsfehler proportional der Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens sich wiederholt, so werden in dem wahrscheinlichsten zu erwartenden Falle in der Summe $a + a' + a''$ $+ \ldots$ alle Beobachtungsfehler sich gegenseitig aufheben oder man wird aus den obigen Gleichungen haben

$$a + a' + a'' + \ldots = mx$$

woraus für x der oben angezeigte Werth folgt.

Offenbar müssen die hier vorausgesetzten Messungen unter einerlei Umständen und mit einerlei Sorgfalt angestellt sein. S. Arithm. §. 140.

Der in dem vorstehenden Lehrsatze betrachtete Fall ist nur ein besonderer Fall der allgemeinen Aufgabe: Aus gegebenen Messungen, welche mit Beobachtungsfehlern behaftet sind, die wahrscheinlichsten Werthe gewisser, von diesen Messungen abhängigen unbekannten Größen zu bestimmen. Diese Aufgabe behandelt die von Gauß erfundene Methode der kleinsten Quadrate.

Von der Wahrscheinlichkeit der Ursachen.

§. 89.

Lehrsatz. Wenn ein gegebener Erfolg mehreren möglichen Ursachen zugeschrieben werden kann, welche an sich gleich möglich sind und von denen jede die andere ausschließt, so ist die Wahrscheinlichkeit einer jeden dieser Ursachen gleich derjenigen Wahrscheinlichkeit, mit welcher der

gegebene Erfolg unter Voraussetzung dieser Ursache erwartet werden durfte, dividirt durch die Summe aller Wahrscheinlichkeiten derselben Art für alle möglichen Ursachen.

Oder wenn w, w', w'' 2c. die Wahrscheinlichkeiten sind, mit denen ein gewisser Erfolg unter der Voraussetzung verschiedener gleich möglichen und von einander unabhängigen Ursachen erwartet werden darf, so sind, sobald dieser Erfolg wirklich eingetreten ist, die Wahrscheinlichkeiten dieser Ursachen einzeln genommen

$$\frac{w}{w+w'+w''\ldots},\quad \frac{w'}{w+w'+w''\ldots},\quad \frac{w''}{w+w'+w''\ldots},\ \text{2c.}$$

Beweis. Da alle Ursachen als gleich möglich vorausgesetzt werden, so müssen sie sämmtlich dieselbe Zahl unter sich gleich möglicher Erfolge haben, welche $= n$ sei und unter denen aus der ersten Ursache a mal, aus der zweiten Ursache a' mal, aus der dritten Ursache a'' mal 2c. der in Rede stehende Erfolg vorkomme. Dann sind, bevor ein Erfolg eintritt, die Wahrscheinlichkeiten des in Rede stehenden Erfolgs aus diesen Ursachen einzeln genommen

$$w = \frac{a}{n},\quad w' = \frac{a'}{n},\quad w'' = \frac{a''}{n},\ \text{2c.}$$

Sobald aber dieser Erfolg eingetreten ist, hat man für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ursachen unmittelbar

$$\frac{a}{a+a'+a''\ldots},\quad \frac{a'}{a+a'+a''\ldots},\quad \frac{a''}{a+a'+a''\ldots},\ \text{2c.}$$

woraus, wenn man Zähler und Nenner dieser Brüche durch n dividirt, die obigen Ausdrücke sofort hervorgehen.

Dieser Lehrsatz ist unter dem Namen der Regel von Bayes bekannt.

Beispiel. Aus einer Urne, welche 2 Kugeln von unbekannten Farben enthält, habe man m mal nach einander eine weiße Kugel gezogen, indem man die gezogene Kugel jedesmal wieder hineinlegte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide Kugeln weiß waren?

Auflösung. Hier sind zwei Ursachen möglich: entweder sind beide Kugeln weiß, oder es ist nur die eine derselben weiß und die andere von irgend einer anderen Farbe. Unter der ersten Voraussetzung hat der stattgehabte Erfolg, bevor er eintritt, eine Wahr-

scheinlichkeit = 1, unter der zweiten Voraussetzung dagegen eine Wahrscheinlichkeit $= \left(\frac{1}{2}\right)^m$. Daraus erhält man nach dem Erfolge für die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Werth

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^m} = \frac{2^m}{2^m+1}$$

z. B. für $m = 3$ wird diese Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{9}$.

Anmerkung. Aus diesem Lehrsatze läßt sich beweisen, daß der im §. 87 als „angenähert" bezeichnete Werth der Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichste Werth dieser Wahrscheinlichkeit ist. Jedoch fordert der Beweis Hülfsmittel, welche hier nicht gegeben werden können.

§. 90.

Lehrsatz. Wenn ein gegebener Erfolg, wie vorhin, mehreren möglichen Ursachen zugeschrieben werden kann, so ist die Wahrscheinlichkeit eines jeden künftigen Erfolgs gleich der Summe der Producte aus der Wahrscheinlichkeit jeder Ursache mit der Wahrscheinlichkeit, daß unter der Voraussetzung dieser Ursache der Erfolg stattfinden werde.

Der Beweis folgt aus dem vorigen Paragraphen durch Anwendung der §§. 84 und 82.

Beweis. Wie groß ist in dem Beispiele des vorigen Paragraphen die Wahrscheinlichkeit, daß mit dem nächsten Zuge wieder eine weiße Kugel erscheinen werde?

Antw. $\frac{2^m}{2^m+1}\cdot 1 + \frac{1}{2^m+1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2^{m+1}+1}{2^{m+1}+2}$, z. B. für $m = 3$ wird diese Wahrscheinlichkeit $= \frac{17}{18}$.

Anmerkung. Wenn in diesem letzten Beispiele allgemein, statt 2 Kugeln, k Kugeln von unbekannten Farben als vorhanden vorausgesetzt werden, so erhält man auf dieselbe Weise für die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Werth $\frac{\Sigma\,(k^{m+1})}{k.\Sigma\,(k^m)}$, wo Σ die unten im §. 105 angezeigte Bedeutung hat.

Man vergleiche hiermit die Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß morgen wieder die Sonne aufgehen wird, nachdem dieses Ereigniß seit ungefähr 6000 Jahren bis heute Tag für Tag sich wiederholt hat? Um diese Frage zu beantworten, muß man in dem zuletzt gegebenen Ausdrucke k über alle Grenzen hinaus wachsen lassen, und erhält also die gesuchte Wahrscheinlichkeit ausgedrückt durch

$$\lim \frac{\Sigma(k^{m+1})}{k.\Sigma(k^m)}$$

für wachsende Werthe von k. Diese Grenze wird $= \frac{m+1}{m+2}$, wie sich aus §. 105 Anm. beweisen läßt, also wird mit Zuziehung der gegebenen Zahlen die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{2191501}{2191502}$.

Die mathematische Hoffnung.

§. 91.

Erklärung. Wenn auf das Eintreffen eines bevorstehenden, vom Zufalle abhängigen Ereignisses ein Preis gesetzt worden ist, so versteht man unter der mathematischen Hoffnung des Preises das Product aus diesem Preise mit der Wahrscheinlichkeit, daß das ihn herbeiführende Ereigniß eintreten werde.

Es sei C der Preis, welcher auf das Eintreffen eines gewissen Ereignisses gesetzt worden ist, und w die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses. Dann ist nach dieser Erklärung die mathematische Hoffnung auf die Erlangung dieses Preises, welche durch E bezeichnet werden möge,

$$E = w\,C.$$

Dieser Betrag drückt den Werth aus, welchen der gesetzte Preis für den Erwartenden hat, bevor über das Eintreffen oder Nicht-Eintreffen des Ereignisses entschieden ist, und bestimmt also in dem Falle einer Wette, eines Spiels u. dgl. die Größe des zu machenden Einsatzes.

Die mathematische Hoffnung auf die Nicht-Erlangung des Preises, welche bei der Wette auf Seite des Gegners, oder beim Spiele auf

Seite des Unternehmers fällt und mit E' bezeichnet werden möge, hat hiernach den Werth

$$E' = (1 - w)\, C$$

und bezeichnet ebenso den Einsatz, welchen der Gegner des Wettenden oder der Unternehmer des Spiels zu leisten hat.

Man bemerke, daß das Verhältniß dieser beiden Einsätze ist

$$E : E' = w : (1 - w)$$

d. h. man wettet w gegen $1 - w$ für das Eintreffen des Ereignisses, oder $1 - w$ gegen w für das Nicht-Eintreffen des Ereignisses.

Die Summe beider Einsätze dagegen beträgt

$$E + E' = C$$

oder macht den gesetzten Preis aus. Dieser Preis wird demnach immer durch die Einsätze der beiden Gegner zusammengetragen und vertheilt sich auf beide nach dem Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten, die denselben zukommen.

Beispiel 1. Beim Werfen mit einem Würfel wird auf den Fall einer bestimmten Zahl, z. B. Eins, ein Preis von 12 ₰ gesetzt. Welche Summe ist für einen Wurf einzusetzen?

Antw. $\frac{1}{6} . 12 = 2$ ₰.

Beispiel 2. Jemand besetzt eine der 36 Nummern des Roulettes mit 10 ₰. Welche Summe muß der Bankhalter dagegen setzen?

Antw. 350 ₰.

Anmerkung. Man darf den Preis nicht mit dem zu hoffenden Gewinne verwechseln. Letzterer kann erst in Frage kommen, nachdem der Einsatz stattgefunden hat, und ist gleich dem um den Einsatz verminderten Preise, s. §. 94.

§. 92.

Zusatz. Wenn gleichzeitig auf das Eintreffen mehrerer von einander unabhängigen Ereignisse Preise gesetzt werden, so ist die mathematische Hoffnung des Preises gleich der Summe der Producte aus jedem dieser Preise mit der Wahrscheinlichkeit, ihn zu erlangen.

Oder es seien C, C', C'' rc. Preise, welche auf das Eintreffen von Ereignissen gesetzt werden, deren Wahrscheinlichkeiten beziehungsweise w, w', w'' rc. sind. Dann wird die mathematische Hoffnung, E, des Preises ausgedrückt durch die Summe

$$E = wC + w'C' + w''C'' + \ldots$$

Dieser Betrag bestimmt auch hier den zu machenden Einsatz. Denn man kann, vom Standpunkte des Spielers, diesen Fall wie die Vereinigung von so viel Spielen, wie Preise gesetzt sind, zu einem einzigen Spiele ansehen, weshalb auch die Einsätze für jene einzelnen Spiele in eine Summe zu vereinigen sind.

Unter den Preisen C, C', C'' rc. dürfen auch einige negativ sein, d. h. eine Herauszahlung von Seite des Spielers fordern.

Beispiel 1. Beim Werfen mit einem Würfel sollen für jede geworfene Zahl so viel Thaler gezahlt werden, wie diese Zahl anzeigt. Welchen Werth hat ein Wurf?

Antw. $\frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3\frac{1}{2}$ ₰.

Beispiel 2. Wie groß ist in einer Lotterie von 500 Nummern, welche 1 Preis von 1000 ₰, 4 Preise von 500 ₰ und 10 Preise von 100 ₰ zählt, der Werth eines Looses?

Antw. $\frac{1}{500} \cdot 1000 + \frac{4}{500} \cdot 500 + \frac{10}{500} \cdot 100 = 8$ ₰.

Beispiel 3. Aus einer Urne, welche 5 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, soll eine Kugel mit der Bedingung gezogen werden, daß, wer eine weiße Kugel trifft, 1 ₰ erhält, dagegen wer eine schwarze Kugel trifft, 1 ₰ zahlt. Wie viel muß der Einsatz für einen Zug betragen?

Antw. $\frac{5}{7} \cdot 1 - \frac{2}{7} \cdot 1 = \frac{3}{7}$ ₰.

§. 93.

Zusatz. Wenn die auf das Eintreffen von Ereignissen gesetzten Preise in vorherbestimmten späteren Terminen fällig sind, so müssen sie, bei der Ermittelung der mathematischen Hoffnung, zuvor mit einem gegebenen Zinsfuße auf ihren gegenwärtigen Werth discontirt werden.

Oder es seien C, C', C'' 2c. Preise, fällig nach n, n', n'' 2c. Jahren, welche auf das Eintreffen von Ereignissen gesetzt werden, deren Wahrscheinlichkeiten w, w', w'' 2c. sind. Dann wird die mathematische Hoffnung, E, des Preises ausgedrückt durch die Summe

$$E = w\,C\varrho^{n} + w'\,C'\,\varrho^{n'} + w''\,C''\,\varrho^{n''} + \ldots$$

wo ϱ den Discontfuß (§. 67) bedeutet. Diese Betrachtung bildet die Grundlage zur Bestimmung der Einsätze (Prämien) bei allen Versicherungs-Anstalten.

Beispiel 1. Jemand will ein Gebäude, dessen Bauwerth $= C$ und dessen Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist abzubrennen, $= w$ ist, auf die Dauer von n Jahren gegen Feuersgefahr versichern. Welchen Betrag E hat er dafür einzuzahlen?

Antw.

$$E = w.C\varrho^{\frac{1}{2}} + (1-w)\,w.C\varrho^{\frac{3}{2}} + (1-w)^2\,w.C\varrho^{\frac{5}{2}} + \ldots (1-w)^{n-1}\,w.C\varrho^{n-\frac{1}{2}}$$

d. i.

$$E = wC\varrho^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-(1-w)^n\varrho^n}{1-(1-w)\,\varrho}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die versicherte Summe unmittelbar nach stattgehabtem Brande, also nach §. 74 durchschnittlich in der Mitte des Brandjahrs gezahlt werden soll.

Der Werth $wC\varrho^{\frac{1}{2}}$ für sich genommen bedeutet offenbar den für die Feuerversicherung auf 1 Jahr zu leistenden Betrag.

Für $C = 6000$ ₰, $w = 0{,}002$ und eine Verzinsung von 4 Procent erhält man für $n = 1$ Jahr $E = 11{,}767$ ₰ und für $n = 10$ Jahr $E = 11{,}767 \,.\, 8{,}365 = 98{,}43$ ₰.

Beispiel 2. Es wünscht Jemand, dessen Wahrscheinlichkeiten nach 1, 2, 3 2c. Jahren noch zu leben mit w, w', w'' 2c. bezeichnet werden, eine Leibrente von jährlich C ₰ zu beziehen, fällig mit dem Schlusse eines jeden Jahrs, welches er von heute an noch durchleben wird. Welche Summe E hat er dafür einzuzahlen?

Antw.

$$E = (w - w').C\varrho + (w' - w'').(C\varrho + C\varrho^2) + (w'' - w''').(C\varrho + C\varrho^2 + C\varrho^3) + \ldots$$

$$\text{d. i.}\quad E = C.(w\varrho + w'\varrho^2 + w''\varrho^3 + \ldots)$$

welche Summe bis zum höchsten Lebensalter, in welchem die Wahrscheinlichkeit, noch ein Jahr zu leben, den Werth Null annimmt, ausgedehnt werden muß.

Die Werthe von w, w', w'' 2c. hängen von dem Lebensalter der betreffenden Person ab, besitzen aber sonst unter einander keinen nachweisbaren Zusammenhang, weshalb auch der vorstehende Ausdruck für E im Allgemeinen sich nicht in eine Summenformel zusammenziehen läßt. Für oberflächliche Rechnungen kann man jedoch in den mittleren Lebensaltern die Hypothese zum Grunde legen, daß von 96 Neugeborenen jährlich Einer stirbt, also z. B. lebend bleiben

60	Personen	von	36 Jahren,
59	"	"	37 "
58	"	"	38 "
57	"	"	39 "
2c.			2c.

so daß man für eine Person von 36 Jahren zu setzen hat

$$w = \frac{59}{60},\ w' = \frac{58}{60},\ w'' = \frac{57}{60},\ \text{2c.}$$

Für $C = 240$ ₰ und eine Verzinsung von 4 Procent erhält man hiernach für eine Person von 36 Jahren $E = 240 \,.\, 14{,}97 = 3593$ ₰.

Beispiel 3. Es wünscht Jemand, dessen Wahrscheinlichkeiten nach 1, 2, 3 2c. Jahren noch zu leben mit w, w', w'' 2c. bezeichnet werden, sein Leben mit einer Summe $= C$ zu versichern, welche bei seinem Tode fällig werden soll. Welchen Betrag E hat er dafür einzuzahlen?

Antw.

$$E = (1 - w)\,.\,C\varrho^{\frac{1}{2}} + (w - w')\,.\,C\varrho^{\frac{3}{2}} + (w' - w'')\,.\,C\varrho^{\frac{5}{2}} + \dots$$

d. i.

$$E = C\varrho^{\frac{1}{2}}\,.\,(1 + w\varrho + w'\varrho^2 + \dots - w - w'\varrho - w''\varrho^2 - \dots)$$

welche Summe bis zum höchsten Lebensalter ausgedehnt werden muß.

Für $C = 1000$ ₰ und eine Verzinsung von 4 Procent erhält man, auf Grundlage derselben Hypothese wie vorhin, für eine Person von 36 Jahren $E = 393$ ₰.

Mehr Details über die Gegenstände der beiden letzten Beispiele sehe man in den besonderen Schriften über Leibrenten und Lebensversicherungen.

Anmerkung. Eine besondere Anwendung der mathematischen Hoffnung ist die Erörterung der Frage, welcher Betrag dem Spieler bei einem unterbrochenen Spiele, oder dem Versicherten bei einer abgebrochenen Versicherung zu erstatten sei. Diese Frage fordert jedoch zu viel Detail, um hier behandelt werden zu können.

§. 94.

Erklärung. Verschieden von der mathematischen Hoffnung des Preises ist die mathematische Hoffnung des Gewinns oder des Verlusts, welche erst stattfindet, nachdem der Einsatz geschehen ist. Jede dieser beiden mathematischen Hoffnungen wird auch das mathematische Risiko genannt.

Es sei, wie in §. 91, C der Preis, welcher auf das Eintreffen eines gewissen Ereignisses gesetzt worden ist, und w die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses. Nimmt man nun an, ein Spieler habe den Einsatz E gemacht, so ist für ihn der mögliche Gewinn $= C - E$, folglich die mathematische Hoffnung des Gewinns, welche der Spieler hegt und welche mit k bezeichnet werden mag,

$$k = w\,(C - E)$$

und dies ist zugleich der Betrag, welchen der Gegner riskirt, d. h. das mathematische Risiko des Gegners.

Ferner ist unter denselben Voraussetzungen der mögliche Verlust $= E$, folglich die mathematische Hoffnung des Verlusts, welche von dem Gegner gehegt wird und welche mit k' bezeichnet werden mag,

$$k' = (1 - w)\,E$$

und dies ist zugleich der Betrag, welchen der Spieler riskirt, d. h. das mathematische Risiko des Spielers.

Diese Begriffe sind hiernach leicht auch auf die Fälle der §§. 92 und 93 zu übertragen, wo mehrere Preise gesetzt werden, also im Allgemeinen mehrere Gewinne und mehrere Verluste möglich sind.

Im Beispiel 1. §. 91, beträgt die mathematische Hoffnung des Gewinns, nachdem der Spieler 2 ₰ gesetzt hat, $\frac{1}{6} . 10 = 1\frac{2}{3}$ ₰ und die mathematische Hoffnung des Verlusts $\frac{5}{6} . 2 = 1\frac{2}{3}$ ₰. Das mathematische Risiko ist also, bei diesem Einsatze, auf beiden Seiten gleich groß.

Im Beispiel 1, §. 92, beträgt die mathematische Hoffnung des Gewinns, nachdem der Spieler $3\frac{1}{2}$ ₰ gesetzt hat, $\frac{1}{6} (\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ ₰ und eben so groß ist die mathematische Hoffnung des Verlusts. Das mathematische Risiko ist also wieder auf beiden Seiten gleich groß.

Der Begriff des mathematischen Risiko wurde zuerst von Tetens 1786 aufgestellt.

§. 93.

Lehrsatz. Wenn auf das Eintreffen gewisser von einander unabhängigen Ereignisse Preise gesetzt worden sind und zu deren Erlangung ein Einsatz gleich der mathematischen Hoffnung des Preises stattgefunden hat, so ist immer die mathematische Hoffnung des Gewinns gleich derjenigen des Verlusts, d. h. das mathematische Risiko ist auf beiden Seiten gleich groß.

Beweis. Es seien C, C', C'' rc. Preise, welche auf das Eintreffen von Ereignissen gesetzt werden, deren Wahrscheinlichkeiten beziehungsweise w, w', w'' rc. sind, und es habe nach §. 92 der Einsatz

$$E = wC + w'C' + w''C'' + \ldots$$

stattgefunden. Bildet man die Differenzen

$$C - E, \; C' - E, \; C'' - E, \text{ rc.}$$

so zeigen die positiven unter diesen Differenzen die möglichen Gewinne, und die negativen derselben die möglichen Verluste an. Damit aber auf diese Weise sämmtliche Verluste getroffen werden, muß man diejenigen Ereignisse, welche nicht mit Preisen bedacht sind, wie mit dem Preise 0 behaftet ansehen und diese Preise 0 unter den Preisen C, C', C'' rc. mitzählen. Alsdann sind alle möglichen Ereignisse mit Preisen bedacht, oder man hat

$$w + w' + w'' + \ldots = 1.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit E und subtrahirt sie darauf von dem obigen Ausdrucke für E, so folgt

$$w(C-E)+w'(C'-E)+w''(C''-E)+\ldots=0$$

in welcher Gleichung der ausgesprochene Lehrsatz enthalten ist. Denn die positiven unter den Gliedern $w(C-E)$, $w'(C'-E)$, $w''(C''-E)$ ꝛc. geben zusammengenommen die mathematische Hoffnung des Gewinns, und die negativen derselben die mathematische Hoffnung des Verlusts, mit dem Zeichen — behaftet. Oder wenn man die mathematische Hoffnung des Gewinns mit k und die des Verlusts mit k' bezeichnet, so verwandelt sich diese letzte Gleichung in

$$k-k'=0$$

d. i.

$$k=k'.$$

Beispiele s. den vorigen Paragraphen.

Anmerkung. Für den Fall eines einzigen Preises hat man den Beweis einfacher aus §. 94. Denn substituirt man daselbst in den Ausdrücken für k und k' den Werth $E=wC$ aus §. 91, so folgt

$$k=k'=w(1-w)C.$$

§. 96.

Lehrsatz. Wenn ein Spiel, in welchem Preise gesetzt sind und der Einsatz gleich der mathematischen Hoffnung des Preises festgestellt worden ist, eine große Zahl von Wiederholungen erfährt, so ist der wahrscheinlichste Erfolg immer der, daß mit dem Schlusse dieser Reihe von Wiederholungen weder auf Seite des Spielers, noch auf der seines Gegners ein Gewinn oder Verlust stattfindet.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Gleichung des vorigen Paragraphen

$$w(C-E)+w'(C'-E)+w''(C''-E)+\ldots=0$$

wenn man hinzunimmt, daß nach dem Gesetze der großen Zahlen (§. 86) in dem wahrscheinlichsten Erfolge die Wiederholungszahlen der einzelnen Ereignisse proportional den Wahrscheinlichkeiten w, w', w'' ꝛc. dieser Ereignisse sind, also in dieser Gleichung unmittelbar für diese Wahrscheinlichkeiten an die Stelle gesetzt werden dürfen.

Wenn nach diesem Lehrsatze für den einzelnen Spieler bei wiederholten Spielen Gewinn und Verlust immer mehr die Tendenz haben, sich gegenseitig auszugleichen, so tritt für den Unternehmer eines Spiels dieser Erfolg auch schon dann ein, wenn er zu einem Spiele gleichzeitig viele Spieler zuläßt, und hierin beruhet die Sicherheit seines Unternehmens. Genau dasselbe gilt von den Versicherungs-Anstalten (§. 93), deren Existenz gleichfalls nur dann hinreichend gesichert ist, wenn sie gleichzeitig viele Theilnehmer zählen. Nichts desto weniger bleibt aber immer, selbst bei großen Zahlen der Theilnehmer, noch ein gewisses mathematisches Risiko bestehen, dessen Kenntniß namentlich den Versicherungs-Anstalten von Wichtigkeit ist.

Es wird kaum nöthig sein zu bemerken, daß von dem besonders auszubedingenden Gewinne, den der gewerbmäßige Spiel-Unternehmer verlangt oder den die Unterhaltung einer Versicherungs-Anstalt erforderlich macht, in dem obigen Lehrsatze gänzlich abgesehen werden muß.

Siebenter Abschnitt.

Von den Differenzreihen und den summatorischen Reihen.

---

§. 97.

Erklärung. Unter einer Progression oder Reihe versteht man allgemein jede Folge von Zahlen, welche nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gebildet worden sind.

Diese Zahlen selbst werden die Glieder der Reihe genannt und durch Indices 0, 1, 2, 3 rc. gezählt.

Einfache Beispiele hierzu sind die arithmetischen und die geometrischen Progressionen der niederen Arithmetik. Im weiteren Sinne gehören dahin alle diejenigen rationalen oder irrationalen Zahlen,

welche man in die Form von Tafeln zu bringen pflegt und von denen die Logarithmen das bekannteste Beispiel bieten.

Das Gesetz, nach welchem die Glieder der Reihe gebildet werden, ist bekannt, sobald das allgemeine Glied der Reihe bekannt ist. Denn setzt man in diesem für die darin enthaltene Hauptzahl, welche z. B. x sei, der Reihe nach die Indices 0, 1, 2, 3 rc. an die Stelle, so erhält man successive die Reihe der Glieder. Man betrachte z. B. die Reihe der Cuben

$$0,\ 1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ \text{rc.}$$

deren allgemeines Glied x^3 ist.

Allgemein soll hier eine Reihe oder Progression durch

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \text{rc.}$$

und das allgemeine Glied derselben durch u_x bezeichnet werden.

§. 98.

Erklärung. Wenn man in einer Reihe jedes Glied derselben von dem nächstfolgenden subtrahirt, so bildet die Folge dieser Differenzen die Differenzreihe der gegebenen Reihe.

Wenn man mit dieser Differenzreihe ebenso verfährt, so erhält man die Differenzreihe der Differenzreihe oder die zweite Differenzreihe der gegebenen Reihe; ebenso aus dieser die Differenzreihe der zweiten Differenzreihe oder die dritte Differenzreihe u. s. w.

Die Bildung der Differenzreihen einer gegebenen Reihe kann man sich durch folgendes Schema veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} u_0 & & u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 & & u_5 \quad \ldots \\ & \Delta u_0 & & \Delta u_1 & & \Delta u_2 & & \Delta u_3 & & \Delta u_4 & \quad \ldots \\ & & \Delta^2 u_0 & & \Delta^2 u_1 & & \Delta^2 u_2 & & \Delta^2 u_3 & & \quad \ldots \end{array}$$

u. s. w.

Hierin bedeutet nach der obigen Erklärung

(1.) $\Delta u_0 = u_1 - u_0$ $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0$ rc.

(2.) $\Delta u_1 = u_2 - u_1$ $\Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1$

(3.) $\Delta u_2 = u_3 - u_2$ $\Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2$

u. s. w. u. s. w.

und allgemein

$$\Delta u_x = u_{x+1} - u_x \qquad \Delta^2 u_x = \Delta u_{x+1} - \Delta u_x \text{ etc.}$$

Das Zeichen Δ muß hier wie Anfangsbuchstabe des Worts Differenz, das Zeichen Δ^2 wie Abkürzung von $\Delta\Delta$ u. s. w. aufgefaßt werden.

Beispiel. Die Reihe der Cuben des vorigen Paragraphen giebt folgendes Schema ihrer Differenzreihen

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & & 216 & & 343 & & \ldots \\
& 1 & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & & 127 & & \ldots & \\
& & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & 36 & & \ldots & & \\
& & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \ldots & & &
\end{array}$$

wo, wie man sieht, mit der letzten Reihe die Bildung der Differenzreihen von selbst abbricht.

§. 99.

Erklärung. Umgekehrt wird jede Reihe die summatorische Reihe ihrer Differenzreihe genannt.

Denn nach den vorigen Formeln ist

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + \Delta u_0 \\
u_2 &= u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 \\
u_3 &= u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2
\end{aligned}$$

u. s. w.

ebenso

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 \\
\Delta u_2 &= \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 \\
\Delta u_3 &= \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2
\end{aligned}$$

u. s. w.

d. h. man kann, sobald man von einer Progression nur ihr erstes Glied, daneben aber sämmtliche Glieder ihrer Differenzreihe kennt, die ganze Progression durch successive Additionen wieder herstellen.

Man vergleiche das vorige Beispiel.

Arithmetische Progressionen von höheren Ordnungen.

§. 100.

Erklärung. Eine Progression wird eine **arithmetische Progression der $n$ten Ordnung** genannt, wenn ihre $n$te Differenz constant ist.

So erscheint z. B. die Reihe der Cuben im §. 98 als eine arithmetische Progression der dritten Ordnung. Denn die dritte Differenz derselben ist constant und hat den beständigen Werth 6, oder mit anderen Worten die vierte und alle folgenden Differenzen haben den Werth Null.

Diese Progressionen haben die besondere Eigenschaft, daß man jederzeit nur $n + 1$ auf einander folgende Glieder derselben zu kennen braucht, um die Progression selbst beliebig weit fortsetzen zu können. Denn jene $n + 1$ Glieder sind genau hinreichend, um aus ihnen durch Subtractionen bis zu der constanten Differenz zu gelangen, und wenn man diese letztere sodann beliebig oft wiederholt, so kann man daraus durch wiederholte Additionen (s. den vorigen Paragraphen) die gegebene Progression so weit fortsetzen wie man will. Man sehe das vorige Beispiel.

Die arithmetischen Progressionen der niederen Arithmetik sind, wie man beiläufig bemerken kann, nur ein besonderer Fall der arithmetischen Progressionen im allgemeinen Sinne dieses Worts. Nämlich sie sind, da ihre erste Differenz constant ist, arithmetische Progressionen der ersten Ordnung. Alle übrigen arithmetischen Progressionen dagegen sind arithmetische Progressionen von höheren Ordnungen.

§. 101.

Lehrsatz. Jede Progression, deren allgemeines Glied u_x ein nach Potenzen der Hauptzahl x geordneter Ausdruck vom $n$ten Grade ist, d. h. von der Form

$$u_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

ist eine arithmetische Progression der $n$ten Ordnung.

Beweis. Man betrachte von dieser Progression zunächst die erste Differenzreihe, deren allgemeines Glied man nach §. 98 durch die Gleichung erhält

$$\Delta u_x = u_{x+1} - u_x$$

also im vorliegenden Falle durch

$$\Delta u_x = a_0 (x+1)^n + a_1 (x+1)^{n-1} + a_2 (x+1)^{n-2} \ldots + a_n$$
$$- (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots + a_n).$$

Führt man die hier angezeigte Subtraction aus, nachdem man die Potenzen von $x+1$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt hat, so fällt die Potenz x^n ganz aus und die Entwickelung beginnt mit

$$\Delta u_x = n a_0 x^{n-1} + \ldots$$

während alle folgenden Glieder dieser Entwickelung niedrigere Potenzen von x enthalten. Die erste Differenzreihe ist demnach eine Progression, deren allgemeines Glied Δu_x ein nach der Hauptzahl x geordneter Ausdruck vom $(n-1)$ten Grade ist.

Fährt man fort die folgenden Differenzreihen zu betrachten, so findet man aus dem Vorigen ohne weitere Rechnung, daß die zweite Differenzreihe eine Progression ist, deren allgemeines Glied $\Delta^2 u_x$ einen nach der Hauptzahl x geordneten Ausdruck vom $(n-2)$ten Grade vorstellt u. s. w. Demnach wird das allgemeine Glied der $n$ten Differenzreihe, oder $\Delta^n u_x$, kein x mehr enthalten oder die $n$te Differenz wird constant sein, d. h. die gegebene Progression fällt unter die Erklärung des vorigen Paragraphen.

Beispiel. Das allgemeine Glied einer Progression sei

$$u_x = 7x^2 - 2x + 10.$$

Die Progression selbst nebst ihren successiven Differenzreihen wird alsdann das Schema geben

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underbrace{0} & & \underbrace{1} & & \underbrace{2} & & \underbrace{3} & & \underbrace{4} & & \\ 10 & & 15 & & 34 & & 67 & & 114 & & \ldots \\ & 5 & & 19 & & 33 & & 47 & & \ldots & \\ & & 14 & & 14 & & 14 & & \ldots & & \end{array}$$

Bildet man aber nach den obigen Andeutungen die allgemeinen Glieder der successiven Differenzreihen, so erhält man

$$\Delta u_x = 7(x+1)^2 - 2(x+1) + 10 - (7x^2 - 2x + 10)$$
$$= 14x + 5$$
$$\Delta^2 u_x = 14(x+1) + 5 - (14x+5)$$
$$= 14$$

d. h. die zweite Differenz der gegebenen Progression ist constant und hat den beständigen Werth 14, oder die gegebene Progression ist eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung.

Als weiteres Beispiel kann auch die Reihe der Cuben aus §. 98 hieher gezogen werden.

§. 102.

Lehrsatz. In einer Progression, deren allgemeines Glied von der Form

$$u_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

ist, hat die constante $n$te Differenz den Werth

$$\Delta^n u_x = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \,.\, a_0.$$

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar durch Fortsetzung der Entwickelungen des vorigen Paragraphen. Denn da aus dem gegebenen Ausdrucke für u_x folgt

$$\Delta u_x = n a_0 x^{n-1} + \ldots$$

so hat man hieraus sofort weiter

$$\Delta^2 u_x = (n-1)\, n\, a_0\, x^{n-2} + \ldots$$
$$\Delta^3 u_x = (n-2)\,(n-1)\, n\, a_0\, x^{n-3} + \ldots$$

u. s. w.,

woraus man zuletzt zu dem oben angezeigten Werthe von $\Delta^n u_x$ gelangt.

Beispiele s. den vorigen Paragraphen.

Anmerkung. Man wird bemerken, daß es in der Folge nicht mehr nöthig ist, in dem Ausdrucke der constanten Differenz $\Delta^n u_x$ den Index x beizusetzen, weil diese Differenz nicht mehr von x abhängt, sondern man einfacher schreiben kann $\Delta^n u$.

§. 103.

Lehrsatz. Wenn das Anfangsglied u_0 einer Progression nebst den Anfangsgliedern ihrer sämmtlichen Differenzreihen Δu_0, $\Delta^2 u_0$ &c. einschließlich der constanten Differenz $\Delta^n u$ gegeben sind, so erhält man das allgemeine Glied u_x jener Progression durch den Ausdruck

$$u_x = u_0 + x.\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1.2}.\Delta^2 u_0 + \ldots$$
$$+ \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2\ldots n}.\Delta^n u.$$

Beweis. Man bilde, von den gegebenen Anfangsgliedern ausgehend, successive das erste, zweite, dritte u. s. w. Glied sowohl der Hauptreihe, als auch aller Differenzreihen, welche letzteren wieder zur Herstellung der ersteren gebraucht werden. Diese Bildung geschieht durch fortgesetzte Substitutionen, zu denen das Material in den Gleichungen des §. 98 enthalten ist, wie folgt:

1) Aus den Gleichungen (1) des §. 98 erhält man

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0 \;,\; \Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 \;,\; \Delta^2 u_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 \text{ &c.}$$

2) Aus den Gleichungen (2) des §. 98 erhält man

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 \;,\; \Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 \;,\; \Delta^2 u_2 = \text{&c.}$$

und wenn man hierin die vorigen Werthe substituirt

$$\begin{array}{lll} u_2 = u_0 + \Delta u_0 & \Delta u_2 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 & \Delta^2 u_2 \text{ &c.} \\ \quad + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 & \quad + \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 & \\ \hline = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 & = \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 & \end{array}$$

Man bemerke, daß diese Bildung augenfällig an die Bildung des Quadrats eines Binomii erinnert, s. Arithmetik §. 187.

3) Aus den Gleichungen (3) des §. 98 erhält man

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 \;,\; \Delta u_3 = \text{&c.}$$

und wenn man hierin die vorigen Werthe substituirt

$$\begin{array}{ll} u_3 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 & \Delta u_3 = \text{&c.} \\ \quad + \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 & \\ \hline = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 & \end{array}$$

Die Entstehung dieses Ausdrucks zeigt wieder dasselbe Gesetz wi die Bildung des Cubus eines Binomii.

Will man so fortfahren und das Glied u_4 herstellen, so muß man die vorstehende Entwickelung an allen mit „ꝛc." bezeichneten Stellen um eine Stufe weiter führen und erhält alsdann ein Resultat, dessen Entstehung wieder der Bildung des Biquadrats eines Binomii gemäß ist.

Daraus folgt allgemein, daß der Ausdruck für u_x nach Analogie der $x$ten Potenz eines Binomii gebildet sein muß, d. h. daß man erhält

$$u_x = u_0 + x.\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1.2}.\Delta^2 u_0 + \ldots + \Delta^x u_0$$

wo die Coefficienten von u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$ ꝛc. identisch sind mit den aus §. 35 bekannten Binomial-Coefficienten.

Nimmt man nun noch an, daß die $n$te Differenz constant sei, so haben alle derselben nachfolgenden Differenzen den Werth Null, und der Ausdruck für u_x bricht von selbst so ab, wie es in dem Lehrsatze angezeigt worden ist.

Beispiel. Wenn man in dem Beispiele des §. 101 nur die Anfangsglieder $u_0 = 10$, $\Delta u_0 = 5$, $\Delta^2 u_0 = 14$ als bekannt voraussetzt, von denen das letztere zugleich die constante Differenz darstellt, so kann man nach dem vorstehenden Lehrsatze das allgemeine Glied der Progression wieder herstellen, indem man setzt

$$u_x = 10 + x.5 + \frac{x(x-1)}{1.2}.14$$
$$= 7x^2 - 2x + 10$$

übereinstimmend mit §. 101.

§. 104.

Zusatz. Eine Progression, deren allgemeines Glied nicht von der im §. 101 angezeigten Form ist, kann niemals eine constante Differenz haben.

Denn gesetzt, es träte in irgend einer Differenzreihe eine constante Differenz ein, so würde, nach dem vorigen Lehrsatze, das allgemeine Glied der Progression unter der daselbst angezeigten Form dargestellt

werden können, welche immer auf die Form des §. 101 sich zurückführen läßt.

Dagegen läßt jede Progression, welche von einer arithmetischen Progression verschieden ist, sich immer so auffassen, daß mit Beschränkung auf eine gewisse Gruppe von Gliedern irgend eine frühere oder spätere Differenz derselben angenähert wie constant angesehen werden darf, die Progression selbst also innerhalb dieser Gruppe angenähert wie eine arithmetische Progression erscheint. Dies tritt besonders dann ein, wenn die Glieder der Progression selbst schon angenäherte Werthe irrationaler Zahlen sind, um so mehr also auch die Glieder der Differenzreihen nur angenäherte Werthe darstellen. Ein Beispiel hierzu geben die logarithmischen Tafeln, in denen bei der gewöhnlichen Anordnung derselben auf kürzere oder längere Strecken schon die erste Differenz constant zu sein pflegt. Dieser Gedanken liegt jeder Interpolation der Progressionen zum Grunde, s. §. 110.

§. 105.

Aufgabe. Die Summe der $m$ten Potenzen der natürlichen Zahlen

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + x^m$$

zu finden, wo m eine beliebige ganze Zahl ist.

Auflösung. Um diese Aufgabe unter die vorigen Regeln zu bringen, bezeichne man die gedachte Summe mit $\Sigma(x^m)$ und betrachte diesen Ausdruck wie das allgemeine Glied einer Progression, deren besondere Glieder entstehen, wenn man darin für den Inder x nach und nach 0, 1, 2, 3, ꝛc. an die Stelle setzt. Das Schema der Differenzreihen dieser Progression wird sodann

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\underbrace{0} & & \underbrace{1} & & \underbrace{2} & & \underbrace{3} & & \underbrace{4} & & \\
0 & & \Sigma(1^m) & & \Sigma(2^m) & & \Sigma(3^m) & & \Sigma(4^m) & & \ldots \\
& 1^m & & 2^m & & 3^m & & 4^m & & \ldots & \\
& & 2^m - 1 & & 3^m - 2^m & & 4^m - 3^m & & \ldots & & \\
& & & 3^m - 2.2^m + 1 & & 4^m - 2.3^m + 2^m & & \ldots & & & \\
& & & & 4^m - 3.3^m + 3.2^m - 1 & & \ldots & & & &
\end{array}$$

und kann bis zu der constanten Differenz, welche $= 1.2.3\ldots m$ sein muß (§. 102), fortgesetzt werden.

Aus den Anfangsgliedern dieser Reihen folgt nach §. 103

$$\Sigma(x^m) = x + \frac{x(x-1)}{1.2}.(2^m - 1)$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}.(3^m - 2.2^m + 1)$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}.(4^m - 3.3^m + 3.2^m - 1) + \ldots$$

welcher Ausdruck jederzeit mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht. Denn nach der Natur der arithmetischen Progressionen muß das Anfangsglied der $(r+1)$ten Differenzreihe, dessen allgemeiner Ausdruck ist

$$(r+1)^m - r.r^m + \frac{r(r-1)}{1.2}.(r-1)^m$$
$$- \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}.(r-2)^m + \ldots \pm 1$$

für $r = m$ sich auf die constante Differenz $1.2.3\ldots m$ und für $r > m$ sich auf Null reduciren.

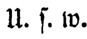
Beispiele. 1) Um die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen zu finden, hat man $m = 2$ zu setzen und erhält

$$\Sigma(x^2) = x + \frac{x(x-1)}{1.2}.3 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}.2$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

Diese Summe ist identisch mit den Tetragonal-Pyramidalzahlen (§. 108).

2) Um die Summe der Cuben der natürlichen Zahlen zu finden, muß man $m = 3$ setzen und erhält

$$\Sigma(x^3) = x + \frac{x(x-1)}{1.2}.7 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}.12$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}.6$$
$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2.$$


U. s. w.

Anmerkung. Durch Entwickelung des obigen allgemeinen Ausdrucks für $\Sigma(x^m)$ ist leicht zu erkennen, daß derselbe allgemein anfangen wird mit

$$\Sigma(x^m) = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + \ldots$$

wo die folgenden Glieder niedrigere Potenzen von x enthalten. Daraus folgt

$$\frac{\Sigma(x^m)}{x^{m+1}} = \frac{1}{m+1} + \ldots$$

wo die folgenden Glieder nur Potenzen von $\frac{1}{x}$ enthalten. Also hat man, für wachsende Werthe von x genommen,

$$\lim \frac{\Sigma(x^m)}{x^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$$

welcher Ausdruck häufig zur Bestimmung von Grenzen angewandt werden kann (siehe z. B. §. 90).

Die figurirten Zahlen.

§. 106.

Erklärung. Unter *figurirten Zahlen* versteht man die Glieder aller derjenigen arithmetischen Progressionen von höherer Ordnung, welche als summatorische Reihen aus einer arithmetischen Progression der ersten Ordnung hervorgehen, deren erstes Glied 1 und deren constante Differenz irgend eine ganze Zahl ist.

Die figurirten Zahlen der zweiten Ordnung insbesondere werden *Polygonalzahlen*, und die der dritten Ordnung *Pyramidalzahlen* genannt.

Der Grund für diese Benennung liegt darin, daß die Einheiten dieser Zahlen sich in regelmäßigen Figuren ordnen lassen, deren Seite durch den Index der Zahl bestimmt wird. Die Polygonalzahlen insbesondere liefern regelmäßige Polygone und zerfallen in *Trigonal-*, *Tetragonal-*, *Pentagonalzahlen* &c. Die Pyramidalzahlen liefern regelmäßige Pyramiden und zerfallen in *Trigonal-*, *Tetragonal-*, *Pentagonal-Pyramidal-*

zahlen ꝛc. Anschauliche Beispiele der Pyramidalzahlen sind die Kugelhaufen, welche man in Zeughäusern aufgeschichtet findet.

Der Index einer figurirten Zahl (so gezählt, daß das erste Glied 1 den Index 1 erhält) wird auch die Seite oder Wurzel dieser figurirten Zahl genannt.

Anmerkung. Die Binomial=Coefficienten für absolute ganze Exponenten sind nichts anderes als figurirte Zahlen mit der constanten Differenz 1. Man muß nur, damit sie unter dieser Form erscheinen, die Tabelle des §. 38 in Zeilen von oben nach unten lesen.

§. 107.

Lehrsatz. Das allgemeine Glied u_x der Reihe der Polygonalzahlen, deren constante Differenz d beträgt, ist

$$u_x = \frac{x(xd - d + 2)}{1 \cdot 2}$$

Beweis. Wenn man, um mit der Bezeichnungsweise des §. 99 in Uebereinstimmung zu bleiben, der Reihe der Polygonalzahlen das Anfangsglied 0 mit dem Index 0 vorsetzt, so ist diese Reihe die summatorische Reihe der arithmetischen Progression erster Ordnung

$$1,\ 1 + d,\ 1 + 2d,\ 1 + 3d,\ \ldots$$

und das Schema ihrer Differenzreihen wird

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underbrace{0} & & \underbrace{1} & & \underbrace{2} & & \underbrace{3} & & \underbrace{4} & & \\ 0 & & 1 & & 2+d & & 3+3d & & 4+6d & & \ldots \\ & 1 & & 1+d & & 1+2d & & 1+3d & & \ldots & \\ & & d & & d & & d & & \ldots & & \end{array}$$

Aus den Anfangsgliedern dieser Reihen folgt nach §. 103

$$u_x = x + \frac{x(x-1)}{2} d$$

welcher Ausdruck sich wie oben zusammenziehen läßt.

Beispiele. 1) Setzt man $d = 1$, so erhält man die Trigonalzahlen (Dreieckzahlen)

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \ldots,\ \text{worin } u_x = \frac{x(x+1)}{2}.$$

2) Setzt man $d = 2$, so erhält man die Tetragonalzahlen (Quadratzahlen)

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots \quad \text{worin } u_x = x^2.$$

3) Setzt man $d = 3$, so erhält man die Pentagonalzahlen (Fünfeckzahlen)

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51,\ \ldots \quad \text{worin } u_x = \frac{x(3x-1)}{2}$$

u. s. w.

§. 108.

Lehrsatz. Das allgemeine Glied u_x der Reihe der Pyramidalzahlen, deren constante Differenz d beträgt, ist

$$u_x = \frac{x(x+1)(xd-d+3)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Beweis. Wenn man, wie in dem vorigen Paragraphen, der Reihe der Pyramidalzahlen das Anfangsglied 0 mit dem Index 0 vorsetzt, so ist diese Reihe die summatorische Reihe der Reihe der Polygonalzahlen des vorigen Paragraphen

$$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ \ldots$$

und das Schema ihrer Differenzreihen wird

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\underbrace{0} & & \underbrace{1} & & \underbrace{2} & & \underbrace{3} & & \underbrace{4} & & \\
0 & & 1 & & 3+d & & 6+4d & & 10+10d & & \ldots \\
& 1 & & 2+d & & 3+3d & & 4+6d & & \ldots & \\
& & 1+d & & 1+2d & & 1+3d & & \ldots & & \\
& & & d & & d & & \ldots & & &
\end{array}$$

Aus den Anfangsgliedern dieser Reihen folgt nach §. 103

$$u_x = x + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}(1+d) + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}d$$

d. i. nach dem Lehrsatze §. 38

$$u_x = \frac{(x+1)x}{1\,.\,2} + \frac{(x+1)x(x-1)}{1\,.\,2\,.\,3}d$$

welcher Ausdruck sich wie oben zusammenziehen läßt.

Beispiele. 1) Setzt man $d = 1$, so erhält man die Trigonal-Pyramidalzahlen

1, 4, 10, 20, 35, 56, ... worin $u_x = \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

2) Setzt man $d = 2$, so erhält man die Tetragonal-Pyramidal-zahlen

1, 5, 14, 30, 55, 91, ... worin $u_x = \frac{x(x+1)(2x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

3) Setzt man $d = 3$, so erhält man die Pentagonal-Pyramidal-zahlen

1, 6, 18, 40, 75, 126, ... worin $u_x = \frac{x^2(x+1)}{1 \cdot 2}$.

U. s. w.

§. 109.

Lehrsatz. Wenn man die successiven ungeraden Zahlen so addirt, daß man zuerst die erste 1 für sich nimmt, darauf die beiden ersten $1 + 3$, dann die drei ersten $1 + 3 + 5$, dann die vier ersten $1 + 3 + 5 + 7$, ꝛc., so erhält man die Reihe der Quadrate.

Wenn man aber die successiven ungeraden Zahlen so addirt, daß man zuerst die erste 1 für sich nimmt, darauf die beiden folgenden $3 + 5$, dann die drei folgenden $7 + 9 + 11$, dann die vier folgenden $13 + 15 + 17 + 19$, ꝛc., so erhält man die Reihe der Cuben.

Beweis. Der erste Theil folgt aus §. 107, wo als Summe der ungeraden Zahlen von der ersten 1 bis zu derjenigen, deren Index x ist, sich der Werth x^2 ergeben hat.

Um den zweiten Theil zu beweisen, addire man zuerst die ungeraden Zahlen von der ersten 1 bis zu derjenigen, deren Index die $x$te Trigonalzahl $= \frac{x(x+1)}{2}$ ist. Diese Summe beträgt nach dem Vorigen $\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$.

Davon subtrahire man die Summe der ungeraden Zahlen von der ersten 1 bis zu derjenigen, deren Index die $(x-1)$te Trigonalzahl $= \frac{(x-1)x}{2}$ ist. Diese Summe beträgt ebenso $\left(\frac{(x-1)x}{2}\right)^2$.

Die Differenz giebt die Summe der x ungeraden Zahlen von der $\frac{(x-1)x}{2}$ten ausschließlich bis zu der $\frac{x(x+1)}{2}$ten einschließlich. Diese Summe wird also

$$\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(x-1)x}{2}\right)^2 = x^3.$$

Interpolation der Progressionen.

§. 110.

Erklärung. Unter Interpolation einer Progression versteht man die Einschaltung von Zwischengliedern in dieser Progression, für gegebene gebrochene Indices, wenn eine Gruppe von Gliedern derselben für ganze Indices bekannt ist.

Die Grundlage aller Interpolationen bildet die Formel des §. 103. Man nimmt an, daß die Differenz einer gewissen Ordnung von der gegebenen Progression innerhalb der gegebenen Gruppe von Gliedern constant sei und betrachtet den daraus hervorgehenden Ausdruck von u_x als gültig auch für gebrochene Werthe des Index x. Dagegen wird von dem allgemeinen Gliede der Progression selbst, von welcher Natur dasselbe auch sein mag, für diesen Zweck kein Gebrauch gemacht. Die Berechnung aller, z. B. der logarithmischen und anderer Tafeln reducirt sich darauf, daß man mit Hülfe ihres allgemeinen Gliedes zuerst eine mäßige, in größeren Intervallen aus einander liegende Zahl von Gliedern berechnet; die zwischenliegenden Glieder werden sodann, ohne weiteren Gebrauch ihres allgemeinen Gliedes, durch Interpolation hergestellt.

Ein Kriterium für die Anwendbarkeit dieser Interpolation liegt darin, daß die Differenzen höherer Ordnungen von der gegebenen Progression im Allgemeinen kleiner und kleiner werden müssen, so daß der Ausdruck für u_x eine convergirende Reihe darstellt, welche man mit einem dem vorgeschriebenen Grade von Genauigkeit entsprechenden Gliede abbrechen kann. Wo diese Bedingung nicht erfüllt wird, da giebt die Interpolation keine zuverlässigen Resultate.

Man kann zwei Hauptaufgaben der Interpolation unterscheiden, je nachdem es entweder nur sich darum handelt, ein einzelnes

Zwischenglied herzustellen, oder alle Intervalle der Hauptreihe in kleineren und unter sich wieder gleichen Intervallen durch Zwischenglieder ausgefüllt werden sollen.

§. 111.

Aufgabe. In einer gegebenen Gruppe von Gliedern einer Progression ein Zwischenglied für einen gegebenen gebrochenen Index einzuschalten.

Auflösung. Die gegebene Gruppe von Gliedern sei

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

Bildet man deren successive Differenzreihen, so hat man nach §. 103

$$u_x = u_0 + x\,.\,\Delta u_0 + \frac{x\,(x-1)}{1\,.\,2}\,.\,\Delta^2 u_0 + \ldots$$

welcher Ausdruck bis zu der constanten Differenz fortgesetzt werden muß. In diesem Ausdrucke ist für x der gegebene gebrochene Index einzusetzen.

Beispiel 1. Das gewöhnliche Interpoliren der logarithmischen und andern Tafeln vermittelst der sogenannten Proportionaltheile beruht auf der Voraussetzung, daß die erste Differenz constant sei, und hat also nach der Formel zu geschehen

$$u_x = u_0 + x\,.\,\Delta u. \tag{1.}$$

Es sei z. B. zu finden log 1952,36, während gegeben ist:

Index	u	Δu
0	log 1952 = 3,29048	22
1	log 1953 = 3,29070	

Hier ist zu setzen $x = 0{,}36$ und man erhält

$$\begin{aligned}\log 1952{,}36 &= 3{,}29048 + 0{,}36\,.\,22\\ &= 3{,}29048\\ &\quad + \ \ 7\,92\\ &= 3{,}29056.\end{aligned}$$

Hiermit kann man vergleichen §. 60 Anmerkung.

Beispiel 2. Wenn nicht mehr die erste, sondern erst die zweite Differenz als constant angesehen werden darf, so hat man zu setzen

$$u_x = u_0 + x \, . \, \Delta u_0 + \frac{x\,(x-1)}{2} \, . \, \Delta^2 u. \qquad (2.)$$

Es sei z. B. zu finden log 20,75, während gegeben ist:

Index	u	Δu	$\Delta^2 u$
0	log 20 = 1,30103		
		2119	
1	log 21 = 1,32222		—99
		2020	
2	log 22 = 1,34242		

Man hat zu setzen $x = 0{,}75$ und erhält

$$\log 20{,}75 = 1{,}30103 + 0{,}75 \, . \, 2119 + \frac{0{,}75 \, . \, 0{,}25}{2} \, . \, 99$$

$$= 1{,}30103$$
$$+ \; 1589 \; 25$$
$$+ \; 9 \; 28$$
$$= 1{,}31702$$

womit man den Logarithmus der Tafel vergleichen mag.

Die Differenzen sind in diesen Beispielen, wie man sieht, überall in Einheiten der fünften Decimalstelle angesetzt worden, was bequemer zu schreiben ist.

§. 112.

Aufgabe. In einer gegebenen Gruppe von Gliedern einer Progression für ein gegebenes einzuschaltendes Zwischenglied den Index zu finden.

Auflösung. Diese Aufgabe ist die Umkehrung der vorigen, d. h. es ist u_x gegeben und x wird gesucht.

Wenn die erste Differenz constant ist, so hat man aus der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen unmittelbar

$$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u}. \qquad (1)$$

Wenn die zweite Differenz constant ist, so löse man die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen auf in der Form

$$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0 + \frac{x-1}{2}\Delta^2 u} \qquad (2)$$

nehme den aus der Gleichung (1) erhaltenen Werth von x, den man wie den ersten Näherungswerth ansieht, und substituire denselben auf der rechten Seite der Gleichung (2), um den genaueren Werth von x zu erhalten.

Ebenso verfahre man, wenn irgend eine spätere Differenz constant ist, indem man allgemein hat

$$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0 + \frac{x-1}{2}\Delta^2 u_0 + \frac{(x-1)(x-2)}{2 \,.\, 3}\Delta^3 u_0 + \ldots} \qquad (3)$$

Beispiel 1. In dem Beispiele 1 des vorigen Paragraphen sei gegeben

$$u_x = 3{,}29056.$$

Man hat $u_x - u_0 = 8$, also aus (1)

$$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u} = \frac{8}{22} = 0{,}36\ldots$$

Also $3{,}29056 = \log 1952{,}36\ldots$ wie oben.

Beispiel 2. In dem Beispiele 2 des vorigen Paragraphen sei gegeben

$$u_x = 1{,}31702.$$

Man hat $u_x - u_0 = 1599$ also aus (1) den ersten Näherungswerth

$$x = \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0} = \frac{1599}{2119} = 0{,}7546.$$

Substituirt man diesen Werth auf der rechten Seite der Gleichung (2), so folgt der genauere Werth

$$x = \frac{1599}{2119 + 0{,}1227 \,.\, 99} = 0{,}7504.$$

Also $1{,}31702 = \log 20{,}75\ldots$ wie oben.

§. 113.

Aufgabe. Eine gegebene Gruppe von Gliedern einer Progression durch die gegebene Zahl m zu interpoliren.

Oder: Eine gegebene Gruppe von Gliedern einer Progression, deren Indices um je 1 fortschreiten, so zu interpoliren, daß die Indices der neu entstehenden Reihe um je $\frac{1}{m}$ fortschreiten.

Auflösung. Die gegebene Gruppe von Gliedern sei

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; u_3, \; \ldots$$

deren Differenzreihen bis zu derjenigen Differenz $\Delta^n u$, welche als constant angesehen werden soll, wie oben zu bilden sind. Das allgemeine Glied dieser Reihe wird sodann nach §. 103

$$u_x = u_0 + x . \Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1 . 2} \Delta^2 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 . 2 . 3} \Delta^3 u_0 + \ldots$$

welcher Ausdruck bis zu der constanten Differenz $\Delta^n u$ fortgesetzt werden muß.

Aus diesem allgemeinen Gliede kann man sofort, indem man darin für x successive die Werthe $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}$ ꝛc. an die Stelle setzt, für die successiven Glieder der gesuchten Reihe die folgenden allgemeinen Ausdrücke bilden:

$$u_0 = u_0$$

$$u_{\left(\frac{1}{m}\right)} = u_0 + \frac{1}{m} . \Delta u_0 - \frac{1(m-1)}{m . 2m} . \Delta^2 u_0 + \frac{1(m-1)(2m-1)}{m . 2m . 3m} . \Delta^3 u_0 - \ldots$$

$$u_{\left(\frac{2}{m}\right)} = u_0 + \frac{2}{m} . \Delta u_0 - \frac{2(m-2)}{m . 2m} . \Delta^2 u_0 + \frac{2(m-2)(2m-2)}{m . 2m . 3m} . \Delta^3 u_0 - \ldots$$

$$u_{\left(\frac{3}{m}\right)} = u_0 + \frac{3}{m} . \Delta u_0 - \frac{3(m-3)}{m . 2m} . \Delta^2 u_0 + \frac{3(m-3)(2m-3)}{m . 2m . 3m} . \Delta^3 u_0 - \ldots$$

ꝛc.

Hieraus folgen weiter für die successiven Glieder der ersten Differenzreihe, indem man für diese zur Unterscheidung δ statt Δ setzt, die folgenden Ausdrücke:

$$\delta u_0 = \frac{1}{m} \cdot \Delta u_0 - \frac{m-1}{2m^2} \cdot \Delta^2 u_0 + \frac{2m^2 - 3m + 1}{6m^3} \cdot \Delta^3 u_0 - \ldots$$

$$\delta u_{\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{m} \cdot \Delta u_0 - \frac{m-3}{2m^2} \cdot \Delta^2 u_0 + \frac{2m^2 - 9m + 7}{6m^3} \cdot \Delta^3 u_0 - \ldots$$

$$\delta u_{\left(\frac{2}{m}\right)} = \frac{1}{m} \cdot \Delta u_0 - \frac{m-5}{2m^2} \cdot \Delta^2 u_0 + \frac{2m^2 - 15m + 19}{6m^3} \cdot \Delta^3 u_0 - \ldots$$

ꝛc.

Hieraus erhält man für die Glieder der zweiten Differenzreihe:

$$\delta^2 u_0 = \frac{1}{m^2} \cdot \Delta^2 u_0 - \frac{m-1}{m^3} \cdot \Delta^3 u_0 + \ldots$$

$$\delta^2 u_{\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{m^2} \cdot \Delta^2 u_0 - \frac{m-2}{m^3} \cdot \Delta^3 u_0 + \ldots$$

ꝛc.

Hieraus die Glieder der dritten Differenzreihe:

$$\delta^3 u_0 = \frac{1}{m^3} \cdot \Delta^3 u_0 - \ldots$$

ꝛc.

und so fährt man fort, bis man zu der constanten Differenz $\delta^n u$ gelangt.

Von diesen so gebildeten Ausdrücken sind für den praktischen Gebrauch nur diejenigen der Anfangsglieder sämmtlicher Reihen, nämlich u_0, δu_0, $\delta^2 u_0$, $\delta^3 u_0$ ꝛc. erforderlich. Denn substituirt man in denselben die gegebenen numerischen Werthe, so hat man damit die vollständigen Data, um aus ihnen durch bloße Additionen (§. 99) die gesuchte Reihe, welche das Resultat der Interpolation ist, herzuleiten.

Als Rechnungsprobe muß man für u_1, u_2, u_3 ꝛc. genau die für diese Glieder gegebenen Werthe wieder erhalten.

Beispiel. Soll eine gegebene Progression, deren dritte Differenz constant ist, durch die Zahl 10 interpolirt werden, so erhält man aus den gegebenen Ausdrücken, indem man $m = 10$ setzt:

$$\delta u_0 = 0{,}1\,\Delta u_0 - 0{,}045\,\Delta^2 u_0 + 0{,}0285\,\Delta^3 u$$
$$\delta^2 u_0 = 0{,}01\,\Delta^2 u_0 - 0{,}009\,\Delta^3 u$$
$$\delta^3 u = 0{,}001\,\Delta^3 u.$$

Es sei z. B. gegeben:

Index	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0	log 20 = 1,30103			
		2119		
1	log 21 = 1,32222		− 99	
		2020		10
2	log 22 = 1,34242		− 89	
		1931		
3	log 23 = 1,36173			

Dann wird
$$\delta u_0 = 216{,}64$$
$$\delta^2 u_0 = -1{,}08$$
$$\delta^3 u = 0{,}01$$
und vermittelst dieser Differenzen erhält man als Resultat der Interpolation die folgende neue Progression:

Index	u	δu	$\delta^2 u$	$\delta^3 u$
0	log 20 = 1,30103			
		216 64		
0,1	log 20,1 = 1,30319 64		− 1 08	
		215 56		0 01
0,2	log 20,2 = 1,30535 20		1 07	
		214 49		0 01
0,3	log 20,3 = 1,30749 69		1 06	
		213 43		0 01
0,4	log 20,4 = 1,30963 12		1 05	
		212 38		0 01
0,5	log 20,5 = 1,31175 50		1 04	
		211 34		0 01
0,6	log 20,6 = 1,31386 84		1 03	
		210 31		0 01
0,7	log 20,7 = 1,31597 15		1 02	
		209 29		0 01
0,8	log 20,8 = 1,31806 44		1 01	
		208 28		0 01
0,9	log 20,9 = 1,32014 72		1 00	
		207 28		0 01
1,0	log 21,0 = 1,32222 00		0 99	
		206 29		0 01
rc.				

welche Reihe durch fortgesetzte Additionen bis zum Index 3 fortzuführen ist.

Man vergleiche mit dem Ergebnisse dieser Interpolation die betreffenden Logarithmen einer fünfstelligen Tafel.

§. 114.

Lehrsatz. **Wenn eine arithmetische Progression, deren $n$te Differenz $\Delta^n u$ constant ist, durch die Zahl m interpolirt wird, so hat die constante Differenz $\delta^n u$ der neu entstehenden Progression den Werth**

$$\delta^n u = \frac{1}{m^n} \cdot \Delta^n u.$$

Beweis. Das allgemeine Glied einer arithmetischen Progression der $n$ten Ordnung kann immer auf die Form gebracht werden (§. 101)

$$u_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

und in den §§. 101 und 102 hat sich gezeigt, daß, wenn man hierin den Index x successive um je 1 wachsen läßt und von der so entstehenden Progression die Differenzreihen bildet, man zuletzt zu der constanten Differenz gelangt

$$\Delta^n u = 1.2.3 \ldots n \,.\, a_0. \tag{1}$$

Wenn man dagegen den Index x successive um je $\frac{1}{m}$ wachsen läßt und die entsprechenden Differenzen zur Unterscheidung mit δ statt Δ bezeichnet, so erhält man auf demselben Wege, wie dort, zuerst

$$\begin{aligned}\delta u_x &= a_0 \left(x + \frac{1}{m}\right)^n + a_1 \left(x + \frac{1}{m}\right)^{n-1} + \ldots + a_n \\ &\quad - (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n) \\ &= \frac{n a_0}{m} \cdot x^{n-1} + \ldots\end{aligned}$$

und daraus weiter

$$\delta^2 u_x = \frac{(n-1)\, n a_0}{m^2} \cdot x^{n-2} + \ldots$$

$$\delta^3 u_x = \frac{(n-2)(n-1)\, n a_0}{m^3} \cdot x^{n-3} + \ldots$$

u. s. w.

und mithin endlich die constante Differenz

$$\delta^n u = \frac{1.2.3\ldots n.a_0}{m^n}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt sodann die Behauptung des Lehrsatzes.

Beispiele sehe man im vorigen Paragraphen.

Achter Abschnitt.

Die Kettenbrüche.

---

§. 115.

Erklärung. **Unter einem Kettenbruche versteht man einen Bruch, dessen Zähler 1 ist und dessen Nenner eine absolute ganze Zahl mit einem angehängten Bruche, welcher wieder den Zähler 1 und einen Nenner von derselben Beschaffenheit wie vorhin hat u. s. f.**

Ein Kettenbruch hat also allgemein die Gestalt

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

und kann entweder mit einem bestimmten Gliede $\frac{1}{a_n}$ abbrechen oder ohne Ende fortgehen. Hier werden zunächst nur endliche Kettenbrüche betrachtet.

Die absoluten ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3 rc. werden die Theilnenner des Kettenbruchs genannt.

Dem Kettenbruche kann auch eine ganze Zahl voraufgehen, in welchem Falle er die Gestalt hat

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

§. 116.

Aufgabe. Einen gegebenen rationalen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Man wende auf Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs das Verfahren an, welches in der Arithmetik §. 76 Auflösung 2 zur Auffindung des größten gemeinschaftlichen Divisors zweier Zahlen gelehrt wird.

War der gegebene Bruch ein ächter Bruch, so sind die durch dieses Verfahren sich ergebenden Quotienten unmittelbar die Theilnenner des gesuchten Kettenbruchs.

War dagegen der gegebene Bruch ein unächter Bruch, so ist der erste dieser Quotienten als ganze Zahl anzusetzen und die folgenden Quotienten sind die Theilnenner des derselben anzuhängenden Kettenbruchs.

Beispiele.

$$\frac{7}{38} = \frac{1}{5+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3}. \qquad \frac{159}{38} = 4 + \frac{1}{5+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3}.$$

Anmerkung. Wollte man die Beschränkung des vorigen Paragraphen, daß alle Zähler des Kettenbruchs 1 sein sollen, aufheben, so würde die hier vorliegende Aufgabe nicht mehr eine bestimmte Aufgabe sein, sondern unzählige Auflösungen zulassen. Aus diesem Grunde werden hier andere als die im vorigen Paragraphen bezeichneten Kettenbrüche nicht betrachtet.

§. 117.

Aufgabe. Einen gegebenen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Oder den Werth von x zu finden aus der Gleichung

$$x = \frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\ldots\,\frac{1}{a_n}$$

wo a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ gegeben sind.

Auflösung 1. Man beschränke die Rechnung zuerst auf den letzten Theilnenner a_n, ziehe zu diesem sodann die übrigen Theil-

nenner a_{n-1}, a_{n-2} rc. einen nach dem andern hinzu, und bezeichne die Reihe der so successive entstehenden Brüche mit

$$\frac{M_1}{N_1}, \frac{M_2}{N_2}, \frac{M_3}{N_3}, \ldots \frac{M_n}{N_n}.$$

Dann hat man

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{M_2}{N_2} = \frac{1}{a_{n-1} + \frac{M_1}{N_1}} = \frac{N_1}{a_{n-1} N_1 + M_1}$$

$$\frac{M_3}{N_3} = \frac{1}{a_{n-2} + \frac{M_2}{N_2}} = \frac{N_2}{a_{n-2} N_2 + M_2}$$

rc., folglich allgemein für den Index r

$$\frac{M_r}{N_r} = \frac{N_{r-1}}{a_{n-r+1} N_{r-1} + M_{r-1}} \qquad (1)$$

Dieser Ausdruck giebt eine allgemeine Regel an, durch welche man jeden dieser Brüche aus dem ihm vorhergehenden ableitet. Man hat nur nöthig, dem ersten dieser Brüche $\frac{M_1}{N_1} = \frac{1}{a_n}$ den fingirten Bruch $\frac{M_0}{N_0} = \frac{0}{1}$ voranzustellen, um aus beiden nach dieser Regel die ganze Reihe der Brüche successive zu entwickeln. Der letzte dieser Brüche, oder $\frac{M_n}{N_n}$, wird der gesuchte Werth von x sein.

Auflösung 2. Man beschränke die Rechnung zuerst auf den ersten Theilnenner a_1, ziehe zu diesem darauf die folgenden Theilnenner a_2, a_3 rc. einen nach dem andern hinzu, und bezeichne die Reihe der successiven Brüche mit

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots \frac{P_n}{Q_n}.$$

Dann hat man

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{a_1}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2 P_1}{a_2 Q_1 + 1}$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) P_1}{\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) Q_1 + 1} = \frac{a_3 P_2 + P_1}{a_3 Q_2 + Q_1},$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) P_2 + P_1}{\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) Q_2 + Q_1} = \frac{a_4 P_3 + P_2}{a_4 Q_3 + Q_2}$$

ꝛc., folglich allgemein für den Index r

$$\frac{P_r}{Q_r} = \frac{a_r P_{r-1} + P_{r-2}}{a_r Q_{r-1} + Q_{r-2}}. \qquad (2)$$

Dieser Ausdruck spricht eine allgemeine Regel aus, durch welche man jeden dieser Brüche aus den beiden ihm vorhergehenden ableitet. Man hat nur nöthig, dem ersten dieser Brüche $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{a_1}$ den fingirten Bruch $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}$ voranzustellen, um aus beiden nach dieser Regel die ganze Reihe der Brüche successive zu entwickeln. Der letzte dieser Brüche, oder $\frac{P_n}{Q_n}$, wird der gesuchte Werth von x sein.

Beispiel. Es sei der Werth von x zu suchen aus der Gleichung

$$x = \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}.$$

Nach der Auflösung 1 erhält man:

Theilnenner . . .		4	1	5	2	3
$\frac{M}{N}$ . . .	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{29}$	$\frac{29}{63}$	$\frac{63}{218}$.

Nach der Auflösung 2 dagegen

Theilnenner . . .		3	2	5	1	4
$\frac{P}{Q}$ . . .	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{11}{38}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{63}{218}$.

Jede dieser Auflösungen giebt also

$$x = \frac{63}{218}.$$

Anmerkung. Wenn man nach beiden gegebenen Auflösungen zugleich rechnet, jedoch nach der einen nur r und nach der andern nur $n-r$ Glieder entwickelt, wo r eine beliebige zwischen 0 und n enthaltene Zahl ist, so kann man aus den so gewonnenen Resultaten allein schon den Werth von x finden. Denn offenbar wird der Ausdruck (2), wenn man darin für a_r an die Stelle setzt $a_r + \frac{M_{n-r}}{N_{n-r}}$, in den wahren Werth von x übergehen, oder man wird haben

$$x = \frac{P_r N_{n-r} + P_{r-1} M_{n-r}}{Q_r N_{n-r} + Q_{r-1} M_{n-r}} \qquad (3)$$

für jeden beliebigen Werth von r. Wenn man z. B. von der obigen Rechnung nur die Bruchstücke stehen läßt

$$\frac{M}{N} \cdots \frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{4}{5} \qquad\qquad \frac{P}{Q} \cdots \frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{11}{38}$$

so folgt hieraus

$$x = \frac{11.5 + 2.4}{38.5 + 7.4} = \frac{63}{218}$$

wie oben.

Man kann übrigens bemerken, daß die erste der beiden obigen Auflösungen wenig im Gebrauch ist und man vorwiegend sich der zweiten bedient, weil die aus ihr hervorgehende Reihe von Brüchen noch besondere bemerkenswerthe Eigenschaften besitzt, die in den nächstfolgenden Paragraphen zur Erörterung kommen.

Die Näherungswerthe der Kettenbrüche.

§. 118.

Erklärung. Diejenigen Brüche, welche man aus einem gegebenen Kettenbruche erhält, indem man denselben mit dem ersten, zweiten, dritten ꝛc. Theilnenner abbricht, werden der erste, zweite, dritte ꝛc. Näherungswerth des Kettenbruchs genannt.

Die Näherungswerthe eines Kettenbruchs sind identisch mit den durch die Auflösung 2. der vorhergehenden Aufgabe gefundenen Brüchen

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Der Grund für diese Benennung liegt in gewissen Eigenschaften dieser Brüche, welche sich unmittelbar aus der obigen Entstehung derselben ergeben und welche sind:

1) die Näherungswerthe sind abwechselnd größer und kleiner als der wahre Werth des Kettenbruchs, und je zwei auf einander folgende Näherungswerthe enthalten also diesen wahren Werth zwischen sich.

2) Die Näherungswerthe kommen successive dem wahren Werthe des Kettenbruchs näher und näher.

Auf diesen Eigenschaften beruhet auch die Anwendung der Kettenbrüche, um einen gegebenen Bruch, dessen Zähler und Nenner große Zahlen sind, angenähert in kleineren Zahlen auszudrücken. Man hat nämlich zu diesem Zwecke den gegebenen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln und die Näherungswerthe dieses letzteren zu bestimmen.

Beispiel. Der preußische Fuß hält gesetzlich 0,31385 Meter. Will man diesen Bruch angenähert in kleineren Zahlen ausdrücken, so verwandele man $\frac{31385}{100000}$ in einen Kettenbruch, wodurch man die Theilnenner erhält

$$3, 5, 2, 1, 2, 2, 2, 25$$

und bestimme hieraus die Näherungswerthe dieses Kettenbruchs, welche sind

$$\frac{1}{3} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{11}{35} \quad \frac{16}{51} \quad \frac{43}{137} \quad \frac{102}{325} \quad \frac{247}{787} \quad \frac{6277}{20000}.$$

Diese Brüche stellen (mit Ausnahme des letzten, welcher dem wahren Werthe gleich ist) angenäherte Werthe des gegebenen Bruchs dar, der erste am wenigsten genau und die folgenden mit successive zunehmender Genauigkeit. Der erste dieser Brüche ist zu groß und die folgenden sind abwechselnd zu klein und zu groß.

Anmerkung. Diese Anwendung der Kettenbrüche hat zuerst Huygens gelehrt, welcher 1695 starb; die Veranlassung dazu scheint ihm die Verfertigung eines Planetarium gegeben zu haben. Denn um die Umlaufszeiten der Planeten durch einen solchen Ap=

parat richtig darzustellen, werden Räder erfordert, in denen die Zahlen der Zähne mit jenen Umlaufszeiten in gleichem Verhältnisse stehen. Da nun die gedachten Umlaufszeiten durch große Zahlen ausgedrückt werden, die Zahl der Zähne in Rädern von gegebener Größe aber eine gewisse Grenze nicht überschreiten kann, so trat die Aufgabe ein, Verhältnisse zu finden, welche in kleineren Zahlen ausgedrückt dennoch der Wahrheit so nahe wie möglich blieben. Huygens löste diese Aufgabe und bewies zugleich die vorzüglichsten Eigenschaften der Kettenbrüche.

§. 119.

Lehrsatz. Zwischen den Zählern und Nennern jeder zwei auf einander folgenden Näherungswerthe findet die Beziehung statt

$$P_r\,Q_{r-1} - P_{r-1}\,Q_r = (-1)^{r-1}$$

Beweis. Für die Differenz zweier auf einander folgenden Näherungswerthe erhält man, unter Zuziehung der Gleichung (2) §. 117, den Ausdruck

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}} = \frac{a_r\,P_{r-1} + P_{r-2}}{a_r\,Q_{r-1} + Q_{r-2}} - \frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}}$$

und wenn man diese Gleichung mit dem Producte der beiden Nenner

$$Q_r\,Q_{r-1} = (a_r\,Q_{r-1} + Q_{r-2})\,Q_{r-1}$$

multiplicirt, so folgt

$$P_r\,Q_{r-1} - P_{r-1}\,Q_r = -(P_{r-1}\,Q_{r-2} - P_{r-2}\,Q_{r-1}).$$

Setzt man hierin für r der Reihe nach die Werthe 2, 3, 4 ꝛc., so hat man einzeln

$$P_2\,Q_1 - P_1\,Q_2 = -(P_1\,Q_0 - P_0\,Q_1)$$
$$P_3\,Q_2 - P_2\,Q_3 = -(P_2\,Q_1 - P_1\,Q_2)$$
$$P_4\,Q_3 - P_3\,Q_4 = -(P_3\,Q_2 - P_2\,Q_3)$$

ꝛc.,

woraus zu erkennen ist, daß mit wachsendem r der Ausdruck $P_r\,Q_{r-1} - P_{r-1}\,Q_r$ seinem Zahlwerthe nach beständig derselbe bleibt und nur von Stufe zu Stufe sein Vorzeichen wechselt.

Nun folgt ferner aus den beiden Werthen

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{a_1} \qquad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}$$

unmittelbar

$$P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = 1.$$

Folglich hat man weiter

$$P_2 Q_1 - P_1 Q_2 = -1$$
$$P_3 Q_2 - P_2 Q_3 = 1$$
$$P_4 Q_3 - P_3 Q_4 = -1$$
$$\text{etc.}$$

und allgemein

$$P_r Q_{r-1} - P_{r-1} Q_r = (-1)^{r-1}.$$

Die Potenz $(-1)^{r-1}$ hat hier lediglich die Bedeutung, als ein einfaches Hülfsmittel zur Bestimmung des richtigen Vorzeichens zu dienen.

Anmerkung. Man wird bemerken, daß dieser Lehrsatz sich auch noch bis auf den Bruch $\frac{P_n}{Q_n}$ erstreckt, obwohl derselbe nicht einen Näherungswerth, sondern den wahren Werth des Kettenbruchs darstellt. Dasselbe gilt von den nächstfolgenden Lehrsätzen.

§. 120.

Lehrsatz. Die Näherungswerthe eines Kettenbruchs sind jederzeit reducirte Brüche.

Der Beweis beruhet auf dem vorigen Lehrsatze. Denn hätten Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{P_r}{Q_r}$ einen gemeinschaftlichen Factor, so müßte vermöge der Gleichung

$$P_r Q_{r-1} - P_{r-1} Q_r = (-1)^{r-1}$$

auch die Zahl 1 durch diesen Factor theilbar sein (Arithm. §. 69), was unmöglich ist.

Hiernach wird auch der letzte Bruch $\frac{P_n}{Q_n}$, welcher den wahren Werth des Kettenbruchs darstellt, jederzeit ein reducirter Bruch sein. Die Verwandlung eines Bruchs in einen Kettenbruch stellt sich demnach als ein neues, vom §. 94 der Arithmetik verschiedenes Verfahren dar, um einen gegebenen Bruch zu reduciren.

§. 121.

Lehrsatz. Die Differenz jeder zwei auf einander folgenden Näherungswerthe hat den Werth

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{Q_r Q_{r-1}}.$$

Der Beweis ist im §. 119 enthalten.

Man kann hiernach die Reihe der Näherungswerthe eines Kettenbruchs nebst ihrer ersten Differenzreihe durch folgendes Schema darstellen:

$$\text{Reihe:} \quad \frac{P_0}{Q_0} \quad \frac{P_1}{Q_1} \quad \frac{P_2}{Q_2} \quad \frac{P_3}{Q_3} \quad \ldots \quad \frac{P_n}{Q_n}$$

$$\text{Differenzen:} + \frac{1}{Q_0 Q_1} \quad - \frac{1}{Q_1 Q_2} \quad + \frac{1}{Q_2 Q_3} \quad \ldots \quad (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{Q_{n-1} Q_n}$$

Hierin bedeutet $Q_0 = 1$ und $Q_1 = a_1$ und jeder folgende Nenner wird aus den beiden vorhergehenden durch die im §. 117 bewiesene Gleichung $Q_r = a_r Q_{r-1} + Q_{r-2}$ abgeleitet.

In dem Beispiele des §. 117 wird das Schema folgendes:

$$\text{Reihe:} \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{11}{38} \quad \frac{13}{45} \quad \frac{63}{218}$$

$$\text{Differenzen:} + \frac{1}{1.3} \quad - \frac{1}{3.7} \quad + \frac{1}{7.38} \quad - \frac{1}{38.45} \quad + \frac{1}{45.218}$$

Anmerkung. Der wahre Werth des Kettenbruchs ist zwischen jeden zwei auf einander folgenden Näherungswerthen enthalten. Also ist der Unterschied zwischen dem wahren Werthe und irgend einem Näherungswerthe, seinem Zahlwerthe nach, jederzeit kleiner als die oben angezeigte Differenz.

Will man aber die Differenz zwischen dem wahren Werthe eines Kettenbruchs und irgend einem Näherungswerthe desselben durch einen genauen Ausdruck darstellen, so kann man dazu durch Hülfe der Gleichung (3) §. 117 gelangen. Es wird nämlich

$$x - \frac{P_r}{Q_r} = \frac{P_r N_{n-r} + P_{r-1} M_{n-r}}{Q_r N_{n-r} + Q_{r-1} M_{n-r}} - \frac{P_r}{Q_r}$$

$$= - \frac{(P_r Q_{r-1} - P_{r-1} Q_r) M_{n-r}}{Q_n Q_r}$$

und vermöge des Lehrsatzes §. 119

$$x - \frac{P_r}{Q_r} = (-1)^r \cdot \frac{M_{n-r}}{Q_n Q_r}.$$

Da mit wachsendem r sowohl M_{n-r} kleiner als auch Q_r größer wird, so wird auch diese Differenz, ihrem Zahlwerthe nach, successive kleiner werden, wie es sein muß.

So hat man in dem Beispiele des §. 117

$$x - \frac{1}{3} = -\frac{29}{218.3}$$

$$x - \frac{2}{7} = +\frac{5}{218.7}$$

$$x - \frac{11}{38} = -\frac{4}{218.38}$$

$$x - \frac{13}{45} = +\frac{1}{218.45}$$

wo die Zähler 29, 5, 4, 1 nichts anderes sind als die Werthe M_4, M_3, M_2, M_1 des §. 117, d. i. identisch mit den bei der Verwandlung des Bruchs $\frac{63}{218}$ in einen Kettenbruch nach §. 116 successive entstehenden Resten der Divisionen.

§. 122.

Zusatz. Jeder Näherungswerth eines Kettenbruchs kann durch die Summe ausgedrückt werden

$$\frac{P_r}{Q_r} = \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \quad \ldots (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{Q_{r-1} Q_r}.$$

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus dem vorigen Paragraphen.

Führt man diese Summe bis zum Nenner Q_n fort, so erhält man den Werth des ganzen Kettenbruchs, oder es ist

$$x = \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \ldots (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{Q_{n-1} Q_n}.$$

So hat man in dem Beispiele des §. 117

$$\frac{63}{218} = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.7} + \frac{1}{7.38} - \frac{1}{38.45} + \frac{1}{45.218}.$$

Unendliche Kettenbrüche.

§. 123.

Lehrsatz. Jeder Kettenbruch, welcher der Erklärung des §. 115 entspricht und ohne Ende fortgeht, ist einer irrationalen Zahl gleich.

Beweis. Wäre der unendliche Kettenbruch einer rationalen Zahl gleich, so würde, wenn man diese unter Festhaltung der Erklärung §. 115 wieder in einen Kettenbruch verwandelte, die Rechnung nach §. 116 mit einem bestimmten Theilnenner abbrechen, was der Voraussetzung widerspricht.

Hiernach bietet der unendliche Kettenbruch sich als eine eigenthümliche Form, verschieden von der unendlichen Reihe (§. 4), dar, unter welcher irrationale Zahlen dargestellt werden können. Der Werth des Kettenbruchs erscheint dabei als eine Grenze, und die Näherungswerthe des Kettenbruchs fallen unter die strenge Erklärung des §. 2, was bei den endlichen Kettenbrüchen nicht der Fall ist.

§. 124.

Lehrsatz. Jeder unendliche Kettenbruch, dessen Näherungswerthe sind

$$\frac{P_0}{Q_0} \quad \frac{P_1}{Q_1} \quad \frac{P_2}{Q_2} \quad \frac{P_3}{Q_3} \quad \text{in inf.}$$

kann durch die unendliche Reihe ausgedrückt werden

$$\frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \ldots \text{ in inf.}$$

Der Beweis folgt aus §. 122.

Hiernach ist es jederzeit leicht, von dem unendlichen Kettenbruche wieder zu der unendlichen Reihe überzugehen. Man kann auch bemerken, daß diese unendliche Reihe nach §. 10 jederzeit eine convergirende Reihe sein wird.

Was dagegen die Darstellung des unendlichen Kettenbruchs selbst aus einem gegebenen irrationalen Ausdrucke anbetrifft, so sollen darüber in den folgenden Paragraphen nur zwei Beispiele gegeben

werden, welche zum wenigsten die Möglichkeit derselben zeigen. Für praktische Anwendungen ist dieser Gegenstand wenig geeignet.

§. 125.

Aufgabe. Eine irrationale Quadratwurzel in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Das einzuschlagende Verfahren wird an einem Beispiele deutlich werden.

Es sei $\sqrt{20}$ zu berechnen. Die nächste ganze Zahl ist 4 und man setzt deshalb

$$1)\quad \sqrt{20} = 4 + \frac{1}{\alpha}.$$

Daraus wird

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{20} - 4} = \frac{\sqrt{20} + 4}{4}$$

und da die nächste hierin enthaltene ganze Zahl 2 beträgt, so setzt man weiter

$$2)\quad \alpha = 2 + \frac{1}{\beta}$$

Dann wird

$$\beta = \frac{4}{\sqrt{20} - 4} = \frac{\sqrt{20} + 4}{1}$$

und da die nächste hierin enthaltene ganze Zahl 8 ist, so hat man weiter zu setzen

$$3)\quad \beta = 8 + \frac{1}{\gamma}.$$

Dann wird γ identisch mit α und mithin tritt von hier an eine periodische Wiederkehr der Theilnenner ein.

Man hat also als Resultat dieser Entwickelung

$$\sqrt{20} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2 + \ldots}}} \text{ in inf.}$$

wo die Theilnenner 2 und 8 periodisch wiederkehren.

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruchs sind

$$\frac{1}{2} \quad \frac{8}{17} \quad \frac{17}{36} \quad \frac{144}{305} \quad \frac{305}{646} \quad \text{rc.}$$

oder die gleichgeltende unendliche Reihe wird

$$\sqrt{20} = 4 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.17} + \frac{1}{17.36} - \frac{1}{36.305} + \frac{1}{305.646} - \text{ in inf.}$$

Anmerkung 1. Das vorstehende Verfahren kann, wie man leicht erkennt, ohne Weiteres auf Ausdrücke von der Form $a + \sqrt{b}$ angewandt werden, und da unter diese Form die Wurzeln einer jeden quadratischen Gleichung fallen, so folgt, daß hiernach auch die Wurzeln einer quadratischen Gleichung (soweit dieselben nicht imaginär werden) in Kettenbrüche verwandelt werden können.

Zuweilen kann man indessen mit quadratischen Gleichungen einfacher verfahren. Es sei gegeben

$$x^2 + ax = 1$$

$$\text{d. i.}\quad x(x + a) = 1$$

Dann folgt

$$x = \frac{1}{a + x}$$

und wenn man hierin auf der rechten Seite für x den gefundenen Werth wieder einsetzt, in dem entstehenden Ausdrucke wieder für x denselben Werth u. s. w., so erhält man

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \dots \text{ in inf.}}}}$$

in welchem Kettenbruche der Theilnenner a beständig wiederkehrt.

Für $a = 1$ stellt diese Gleichung die Theilung einer Linie, deren Länge $= 1$ ist, nach stetiger Proportion dar. Man hat also für diesen Fall

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots \text{ in inf.}}}}$$

wovon die Näherungswerthe sind

$$\frac{1}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{3}{5}\quad \frac{5}{8}$$ 2c. (s. Planimetrie §. 250).

Anmerkung 2. Um aus einem gegebenen periodischen Kettenbruche den ihm gleichen Wurzel-Ausdruck wieder herz

man den hier zuletzt angezeigten Weg rückwärts einzuschlagen. Es sei z. B. der Werth von x zu finden aus

$$x = \frac{1}{2 +} \frac{1}{8 +} \frac{1}{2 +} \dots \text{ in inf.}$$

wo die Theilnenner 2 und 8 periodisch wiederkehren. Man setze

$$x = \frac{1}{2 +} \frac{1}{8 + x}$$

woraus folgt

$$x = \frac{8 + x}{17 + 2x}$$

$$x^2 + 8x = 4$$

$$x = -4 \pm \sqrt{20}.$$

Von dem doppelten Vorzeichen $\pm$ kann hier nur das obere $+$ gelten, weil der gegebene Kettenbruch einen positiven Werth darstellt.

§. 126.

Aufgabe. Einen irrationalen Logarithmus in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Es sei im Briggischen Systeme log 300 zu berechnen. Die nächste ganze Zahl ist 2 und man setzt deshalb

$$1)\quad \log 300 = 2 + \frac{1}{\alpha}$$

woraus

$$\alpha = \frac{1}{\log 300 - 2} = \frac{\log 10}{\log 3}.$$

Die nächste hierin enthaltene ganze Zahl beträgt 2, weil $3^2 = 9$ dagegen $3^3 = 27$ ist, und man setzt deshalb weiter

$$2)\quad \alpha = 2 + \frac{1}{\beta}.$$

woraus

$$\beta = \frac{\log 3}{\log 10 - 2 \log 3} = \frac{\log 3}{\log 1{,}111}.$$

Die nächste hierin enthaltene ganze Zahl beträgt 10, weil $1{,}111^{10} = 2{,}867$ dagegen $1{,}111^{11} = 3{,}186$ ist, und man setzt deshalb weiter

$$3)\quad \beta = 10 + \frac{1}{\gamma}$$

woraus

$$\gamma = \frac{\log 1{,}111}{\log 3 - 10 \log 1{,}111} = \frac{\log 1{,}111}{\log 1{,}046}$$

Die nächste hierin enthaltene ganze Zahl beträgt 2, also setzt man weiter

$$4)\quad \gamma = 2 + \frac{1}{\delta}$$

woraus

$$\delta = \frac{\log 1{,}046}{\log 1{,}111 - 2 \log 1{,}046} = \frac{\log 1{,}046}{\log 1{,}015}.$$

Die nächste hierin enthaltene ganze Zahl beträgt 3, also hat man weiter zu setzen

$$5)\quad \delta = 3 + \frac{1}{\varepsilon}$$

u. s. f.

Man hat also bis dahin als Resultat dieser Entwickelung

$$\log 300 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \text{in inf.}}}}}$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruchs sind

$$\frac{1}{2} \quad \frac{10}{21} \quad \frac{21}{44} \quad \frac{73}{153} \quad \text{rc.}$$

oder die gleichgeltende unendliche Reihe wird

$$\log 300 = 2 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.21} + \frac{1}{21.44} - \frac{1}{44.153} + \text{in inf.}$$

Als Rechnungsprobe kann man bemerken, daß der letzte dieser Näherungswerthe, auf 5 Decimalstellen genau, giebt

$$\frac{73}{153} = 0{,}47712.$$

Neunter Abschnitt.

Allgemeine Darstellung der complexen Zahlen.

§. 127.

Forderungssatz. Durch die gegebene Zahlenlinie eine Ebene zu legen, d. h. diese Ebene so zu legen, daß sie die Zahlenlinie nach der ganzen Erstreckung derselben in sich enthält.

(Man vergleiche Stereometrie §. 2.)

Zur Erläuterung bemerke man Folgendes. Durch den bis hieher stattgefundenen Fortschritt in der Betrachtung der Zahlen hat sich ergeben, daß die natürliche Zahlenreihe oder die Reihe der absoluten ganzen Zahlen, mit welcher die Arithmetik beginnt, durch successive Begriffs-Erweiterungen zuletzt in die continuirliche Zahlenlinie sich verwandelt hat. Jeder Punkt dieser Zahlenlinie bedeutet entweder eine algebraische ganze Zahl, oder einen Bruch, oder eine irrationale Zahl. Die ganzen Zahlen und Brüche können unmittelbar durch die üblichen Zeichen der niederen Arithmetik, die irrationalen Zahlen dagegen nur unter der Form von Grenzen ausgedrückt werden. Alle diese Zahlen zusammen genommen machen den Inbegriff der reellen Zahlen aus.

Soll nun eine abermalige Erweiterung des Zahlengebiets stattfinden, so ist sofort klar, daß dazu nicht mehr die Zahlenlinie ausreichen kann, weil diese bereits vollständig durch die reellen Zahlen eingenommen wird. Hierin also begründet sich die Forderung, welche in dem obigen Lehrsatze ausgesprochen liegt.

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satze ist die, daß von hier an die gesammte Planimetrie nebst der ebenen Trigonometrie als bekannt vorausgesetzt werden muß und als Bestandtheil in die Analysis übergeht.

Anmerkung. Die hier zu entwickelnde Erweiterung des Zahlengebiets aus der Zahlenlinie in die Zahlen-Ebene verdankt man in der Hauptsache Gauß, obwohl auch andere Mathematiker nahe

gleichzeitig zu ähnlichen Betrachtungen gelangt sind. Die Benennung „complexe Zahlen", sowie das Zeichen *i* (s. §. 128) wurden gleichfalls durch Gauß eingeführt. Ob dieser Erweiterung des Zahlengebiets dereinst noch eine Erweiterung aus der Zahlen-Ebene in einen Zahlen-Raum nachfolgen werde, darüber giebt der gegenwärtige Zustand der Analysis keine sichere Auskunft. Der Anschein ist für das Gegentheil.

§. 128.

Erklärung. Die Zahlen der vermöge des vorigen Paragraphen festgelegten Zahlen-Ebene führen den Namen complexe Zahlen.

Sie zerfallen in die reellen und die imaginären Zahlen, je nachdem sie in der ursprünglichen Zahlenlinie enthalten sind oder nicht.

Die Art, wie man sich die complexen Zahlen in der Zahlen-Ebene zu denken hat, kann man sich zunächst in dem einfachsten Falle, wo nur ganze Zahlen betrachtet werden, anschaulich machen wie folgt.

Man nehme an, eine Ebene enthalte ein System quadratisch angeordneter Punkte, die durch Zahlen bezeichnet werden sollen. Wählt man irgend einen Punkt A dieses Systems aus, so gehören demselben vier zunächstliegende Punkte zu, durch welche vier von A ausgehende Richtungen festgelegt werden, die in A rechte Winkel einschließen. Es steht frei, den Uebergang aus A zu irgend einem dieser vier Punkte als Einheit anzunehmen und demgemäß mit $+1$ zu bezeichnen; ist die Wahl getroffen, so folgt sogleich -1 als die Bezeichnung des Uebergangs aus A in den entgegengesetzt liegenden Punkt, und man ist nun im Stande, alle Punkte derjenigen Reihe, welche jene beiden Punkte in sich faßt, durch positive und negative ganze Zahlen, die ihre Beziehung zu A ausdrücken, zu bezeichnen. Nun entsteht weiter die Frage nach dem Uebergange aus dieser Reihe in eine der beiden benachbarten, welche gegen die anfängliche Reihe eine Lage haben, die sich durch die Benennungen „links" und „rechts" ausdrücken läßt. Hier tritt wieder der Begriff des Gegensatzes ein. Bezeichnet man den Uebergang aus A (oder irgend

einem andern Punkte der anfänglichen Reihe) in den nächstliegenden Punkt der einen benachbarten Reihe, etwa links, mit $+i$ (wo i ein willkürliches, nur von 1 verschiedenes Zeichen ist), so wird derselbe Uebergang, rechts ausgeführt, mit $-i$ bezeichnet werden müssen. Läßt man endlich die für den Punkt A getroffenen Bestimmungen auch für jeden beliebigen Punkt des Systems gelten, und setzt überdies fest, welcher dieser Punkte als der gemeinschaftliche Nullpunkt für das ganze System angesehen werden soll, so ist klar, daß man aus diesem Nullpunkte zu jedem beliebigen Punkte des Systems jederzeit durch eine Anzahl von Uebergängen der angegebenen Arten gelangen kann und daß, wenn man diese Uebergänge in eine Summe vereinigt, für jeden Punkt des Systems eine Bezeichnung von der Form $a + i\,b$ entsteht, wo a und b positive oder negative ganze Zahlen oder Null sind.

Man erkennt jetzt auch leicht, wie man durch Einschaltungen in diesem Systeme jeden beliebigen Punkt der angenommenen Ebene durch eine Bezeichnung von der Form $a + i\,b$ darstellen kann, wo a und b auch gebrochen oder irrational sein können.

§. 129.

Zusatz. Jede complexe Zahl ist von der Form $a + i\,b$, wo a und b beliebige reelle Zahlen sein können und i die imaginäre Einheit genannt wird.

Dies folgt aus der vorigen Darstellung, sobald man darin diejenige Linie, welche den Nullpunkt, sowie die positiven und negativen ganzen Zahlen in sich enthält, als identisch mit der gegebenen Zahlenlinie (§. 127), die hier die Achse der reellen Zahlen heißt, ansieht.

Geometrisch betrachtet, bedeutet die Zahl a einen aus dem Nullpunkte A, Fig. 1, auf der Achse XX' der reellen Zahlen genommenen Abschnitt AB; die Zahl b ein auf dieser Achse im Punkte B errichtetes Perpendikel BC; und das Zeichen i die im Punkte B stattfindende rechtwinkelige Ablenkung, um aus der Richtung AB in die Richtung BC zu gelangen. Die Summe $a + i\,b$ (in der Figur $5 + 3\,i$) ist sodann hier die dem Punkte C der Zahlen-Ebene zugehörige complexe Zahl.

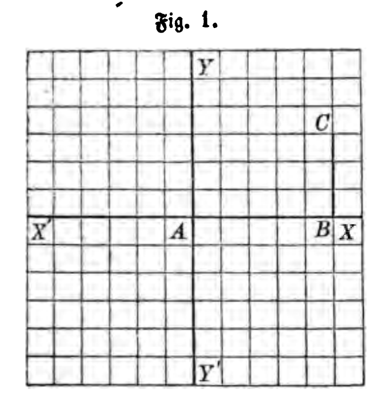


Fig. 1.

Wenn $b = 0$ ist, so fällt der betrachtete Punkt in die Achse der reellen Zahlen und die ihm zugehörige Zahl reducirt sich auf eine reelle Zahl. Wenn b nicht Null ist, so fällt der betrachtete Punkt der Zahlen-Ebene außerhalb der Achse der reellen Zahlen und die ihm zugehörige Zahl ist eine imaginäre Zahl. Insbesondere wenn b nicht Null, dagegen $a = 0$ ist, so fällt der betrachtete Punkt in die Linie YY', welche die Achse der reellen Zahlen im Nullpunkte rechtwinkelig schneidet und die Achse der imaginären Zahlen genannt wird, und die ihm zugehörige Zahl heißt eine rein imaginäre Zahl.

Anmerkung. Je nachdem a und b andere Vorzeichen besitzen, fällt der durch $a + ib$ bezeichnete Punkt der Zahlen-Ebene in einen anderen der durch die beiden Achsen gebildeten vier Quadranten. Dies wird durch Fig. 2 veranschaulicht. Darin bezeichnet, indem wie oben XX' und YY' die beiden Achsen sind

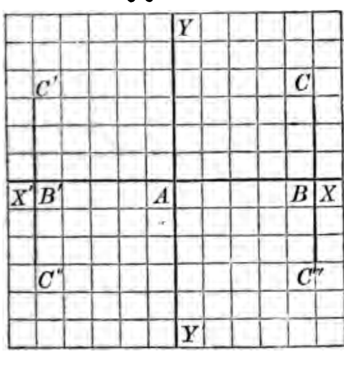


Fig. 2.

$+ 5 + 3i$ den Punkt C
$- 5 + 3i$ den Punkt C'
$- 5 - 3i$ den Punkt C''
$+ 5 - 3i$ den Punkt C'''.

Man kann den Ausdruck $a + ib$ geometrisch lesen: a + „linksum" b; wo das „linksum" von selbst sich in „rechtsum" verwandelt, sobald a und b ungleiche Vorzeichen haben.

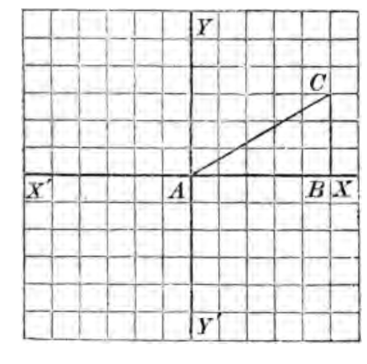
§. 130.

Zusatz. Jede complexe Zahl kann auch unter die Form $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ gebracht werden, wo r eine positive

Zahl ist, welche der Modulus der complexen Zahl genannt wird, und der Winkel φ einen beliebigen reellen Werth haben kann.

Es sei $a + ib$ die dem Punkte C der Zahlen-Ebene, Fig. 3, zugehörige complexe Zahl, oder $AB = a$, $BC = b$. Zieht man die gerade Linie AC, bezeichnet die Länge von AC mit r und den Winkel CAB mit φ, so hat man nach den §§. 40 und 41 der Trigonometrie

Fig. 3.



$$\left.\begin{aligned} r \cos \varphi &= a \\ r \sin \varphi &= b \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

und wenn man diese Werthe in den Ausdruck $a + ib$ für a und b einsetzt, so wird

$$a + ib = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Aus den §§. 42 und 43 der Trigonometrie folgt ferner

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tang} \varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

welche Gleichungen gebraucht werden, um r und φ aus den gegebenen Werthen von a und b zu berechnen. Dabei ist zu erinnern, daß die Quadratwurzel, durch welche man r findet, nur positiv genommen werden darf, und daß man den Winkel φ in Folge der Gleichungen (1) jederzeit so nehmen muß, daß $\cos \varphi$ mit a, sowie $\sin \varphi$ mit b einerlei Vorzeichen hat.

Unter dem Winkel versteht man in der Analysis immer den ihm zugehörigen Kreisbogen für den Halbmesser Eins. Man hat also für den rechten Winkel $\frac{\pi}{2}$, für den geraden Winkel π zu setzen &c. Der Winkel in dieser Bedeutung kann jeden beliebigen reellen Werth annehmen, d. h. er kann nicht nur größer als eine volle Umdrehung, sondern auch negativ sein; die trigonometrischen Zahlen der Winkel kehren aber nach jeder vollen Umdrehung in derselben Größe und Reihefolge wieder.

Der Ausdruck $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ reducirt sich auf eine reelle Zahl, wenn $\varphi = 0$ oder gleich einem beliebigen positiven oder negativen Vielfachen von π ist. Diese reelle Zahl wird positiv bei einem geraden Vielfachen von π, und negativ bei einem ungeraden Vielfachen von π. Der Modulus r wird in diesem Falle identisch mit demjenigen, was man den Zahlwerth der reellen Zahl nennt. Dagegen für jeden anderen Werth von φ bedeutet jener Ausdruck eine imaginäre Zahl, und insbesondere, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ ist, eine rein imaginäre Zahl.

Anmerkung. Die beiden in den vorstehenden Paragraphen erläuterten Formen der complexen Zahlen sollen hier als die algebraische und die trigonometrische Form derselben unterschieden werden.

§. 131.

Erklärung. Zwei complexe Zahlen sind gleich, wenn sie demselben Punkte der Zahlen-Ebene zugehören.

Dies ist eine Erweiterung der Erklärung §. 4 der Arithmetik.

Man schließt hieraus leicht:

1) Soll in der algebraischen Form der complexen Zahlen die Gleichung

$$a + ib = a' + ib'$$

stattfinden, so ist dies nur möglich, indem man einzeln hat

$$a = a' \quad , \quad b = b'$$

d. h. es müssen die reellen Theile für sich, und die rein imaginären Theile für sich gleich sein.

2) Soll in der trigonometrischen Form der complexen Zahlen die Gleichung

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

stattfinden, so müssen zwar die Moduli gleich sein, aber die Winkel sind nicht nothwendig gleich, sondern können auch um eine oder mehrere volle Umdrehungen sich von einander unterscheiden, weil dieser Unterschied auf die Werthe des Cosinus und des Sinus keinen Einfluß übt. Man wird also einzeln haben

$$r = r' \quad , \quad \varphi = \varphi' + 2h\pi$$

wo h eine beliebige algebraische ganze Zahl, einschließlich der Zahl Null, bedeutet.

3) Soll $a + ib = 0$ sein, so muß man haben $a = 0$ und $b = 0$.

4) Soll $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0$ sein, so muß man haben $r = 0$, während φ einen vollkommen willkürlichen Werth besitzen darf.

Addition complexer Zahlen.

§. 132.

Erklärung. **Zwei complexe Zahlen werden addirt, indem man aus dem Punkte der Zahlen-Ebene, welchem die erste Zahl zugehört, so in dieser Ebene fortschreitet, wie die zweite Zahl vom Nullpunkte ausgehend entstanden ist.**

Es seien $a + ib$ und $a' + ib'$ zwei gegebene complexe Zahlen, welche den Punkten C und C', Fig. 4, der Zahlen-Ebene zugehören.

Fig. 4.

Die Addition dieser beiden Zahlen fordert sodann, man soll aus dem Punkte C so in der Ebene fortschreiten, wie aus dem Nullpunkte A fortgeschritten werden mußte, um zu dem Punkte C' zu gelangen. Derjenige Punkt C'' der Ebene, welchen man auf diese Weise erreicht, stellt die Summe der beiden gegebenen Zahlen dar.

In der Figur ist beispielsweise die Addition

$$(2 + 3i) + (5 + 2i) = 7 + 5i$$

ausgeführt worden.

Anmerkung. Zur Ausführung dieser und der hier folgenden Constructionen in der Zahlen-Ebene bedient man sich bequem eines Papiers, welches mit einem genauen Quadratnetz bedruckt worden ist. Solches Papier ist jetzt überall in den Handlungen käuflich zu haben.

§. 133.

Lehrsatz. Zwei complexe Zahlen werden addirt, indem man ihre reellen Theile für sich, und ihre rein imaginären Theile für sich addirt.

Der Beweis ergiebt sich durch Anwendung der vorigen Erklärung. Es seien die beiden Zahlen gegeben $a + ib$ und $a' + ib'$, und die gesuchte Summe derselben werde bezeichnet mit $A + iB$. Alsdann folgt aus dem Gange der Addition

$$A = a + a', \quad B = b + b',$$

folglich wird die gesuchte Summe

$$A + iB = a + a' + i(b + b').$$

Wenn die Zahlen in der trigonometrischen Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ gegeben sind, so erhält man auf dieselbe Weise als Summe

$$r\cos\varphi + r'\cos\varphi' + i(r\sin\varphi + r'\sin\varphi').$$

§. 134.

Zusatz. Die Vertauschung der Theile einer Summe complexer Zahlen hat auf diese Summe keinen Einfluß.

Man kann sich von diesem Satze, welcher unmittelbar aus dem vorigen Paragraphen folgt, auch leicht auf geometrischem Wege überzeugen. Denn in Fig. 4 (§. 132) ist der Punkt C'' der vierte Eckpunkt eines Parallelogramms, welches aus den beiden Seiten AC und AC' nebst dem von diesen eingeschlossenen Winkel gebildet wird. Man kann also zu diesem Punkte eben sowohl gelangen, indem man CC'' gleich und parallel AC', als auch indem man $C'C''$ gleich und parallel AC zieht.

§. 135.

Zusatz. Die Subtraction complexer Zahlen wird ausgeführt, indem man zu dem Minuend das Entgegengesetzte des Subtrahenden addirt.

Man sehe Arithmetik §. 51.

Wenn von zwei complexen Zahlen die eine das Entgegengesetzte der anderen sein, d. h. beide zur Summe Null geben sollen, so müssen die ihnen entsprechenden Punkte der Zahlen-Ebene eine solche Lage haben, daß die sie verbindende gerade Linie durch den Nullpunkt geht und in diesem halbirt wird (wie z. B. oben in Fig. 2 C und C'', sowie C' und C''').

Man kann also von einer gegebenen complexen Zahl, anstatt ihre Vorzeichen zu ändern, in der trigonometrischen Form derselben auch dadurch das Entgegengesetzte erhalten, daß man ihren Winkel um π oder ein ungerades Vielfaches von π vergrößert oder verkleinert.

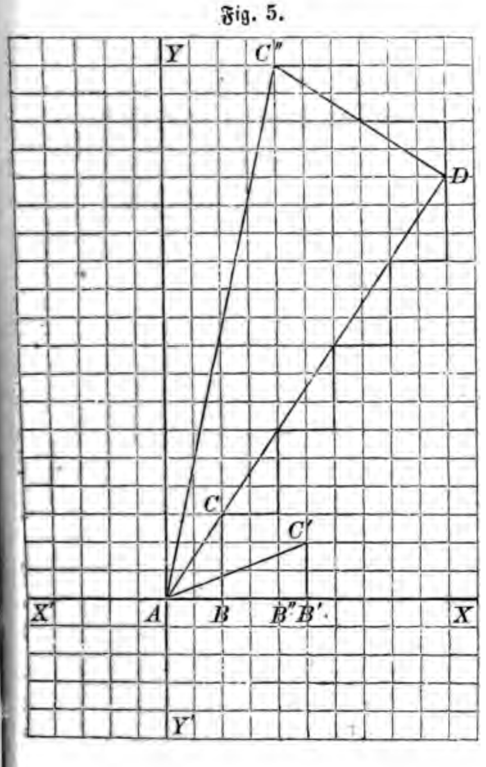
Multiplication complexer Zahlen.

§. 136.

Erklärung. Zwei complexe Zahlen werden multiplicirt, indem man den Multiplicand in der Zahlen-Ebene auf dieselbe Weise als Theil setzt, wie die Einheit gesetzt werden mußte, um den Multiplicator entstehen zu lassen.

Es seien $a + ib$ und $a' + ib'$ zwei gegebene complexe Zahlen, welche den Punkten C und C', Fig. 5, der Zahlen-Ebene zugehören. Um das Product dieser beiden Zahlen zu finden, muß man sich den Multiplicator, welchem der Punkt C' entspreche, so aus der Einheit entstanden denken, daß diese zuerst a' mal und darauf, linksum ablenkend, noch b' mal als Theil gesetzt wurde. Demgemäß setze man ebenso den Multiplicand, welchem der Punkt C entspricht, zuerst so als Theil, wie der reelle Theil a' des Multiplicators anzeigt, und darauf weiter, linksum ablenkend, so als Theil, wie der

Fig. 5.



Coefficient b' des rein imaginären Theils des Multiplicators vorschreibt.

Durch die erste dieser Operationen gelangt man zu dem Punkte D und darauf durch die zweite zu dem Punkte C'' der Ebene, welcher das gesuchte Product darstellt.

In der Figur ist beispielsweise die Multiplication

$$(2 + 3\,i)\;(5 + 2\,i) = 4 + 19\,i$$

ausgeführt worden.

§. 137.

Lehrsatz. Das Product zweier complexen Zahlen in der algebraischen Form derselben wird

$$(a + i\,b)\,.\,(a' + i\,b') = aa' - bb' + i\,(a\,b' + a'b).$$

Beweis. Wenn man, nach der vorigen Erklärung, den Multiplicand $a + i\,b$ zuerst so als Theil setzt, wie der reelle Theil a' des Multiplicators anzeigt, so erhält man

$$(a + i\,b)\,.\,a' = aa' + i\,a'b. \qquad (1)$$

Um darauf den Multiplicand $a + i\,b$ auch noch so als Theil zu setzen, wie der rein imaginäre Theil $i\,b'$ des Multiplicators vor-

schreibt, hat man zunächst die rechtwinkelige Ablenkung auszuführen, nämlich

$$(a + i\,b)\,.\,i = i\,a - b$$

und dieses Resultat sodann b' mal als Theil zu setzen, d. i.

$$(a + i\,b)\,.\,i\,b' = (i\,a - b)\,.\,b' = i\,ab' - bb'. \qquad (2)$$

Die Summe der Resultate aus (1) und (2) giebt das verlangte Product, wie oben.

§. 138.

Zusatz. Die Multiplication der imaginären Einheit mit sich selbst giebt immer

$$i^2 = -1.$$

Denn der Multiplicator i fordert, daß man den Multiplicand i, linksum ablenkend, einmal setzen soll, wodurch man zu -1 gelangt. Dies ist ein besonderer Fall des vorigen Paragraphen, wenn man daselbst $a = a' = 0$ und $b = b' = 1$ annimmt.

Es folgt hieraus, daß die Zahl i, durch die Operationszeichen der niederen Arithmetik ausgedrückt, identisch mit $\sqrt{-1}$ ist (vergl. Arithm. §. 193 Anm.).

Ferner folgt hieraus, daß die Zahl i die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt, daß ihr Entgegengesetztes gleich ihrem Umgekehrten ist, d. h. $\frac{1}{i} = -i$.

Anmerkung. Man wird bemerken, daß die Multiplication complexer Zahlen genau nach denselben Rechnungsregeln wie diejenige reeller Zahlen ausgeführt werden kann, wenn man nur hinzufügt, daß überall $i^2 = -1$ gesetzt werden muß. Hieraus ist zu erklären, wie mit complexen Zahlen schon bis zu einer gewissen Vollkommenheit gerechnet werden konnte, bevor die geometrische Deutung derselben bekannt war.

§. 139.

Lehrsatz. Das Product zweier complexen Zahlen in der trigonometrischen Form derselben wird

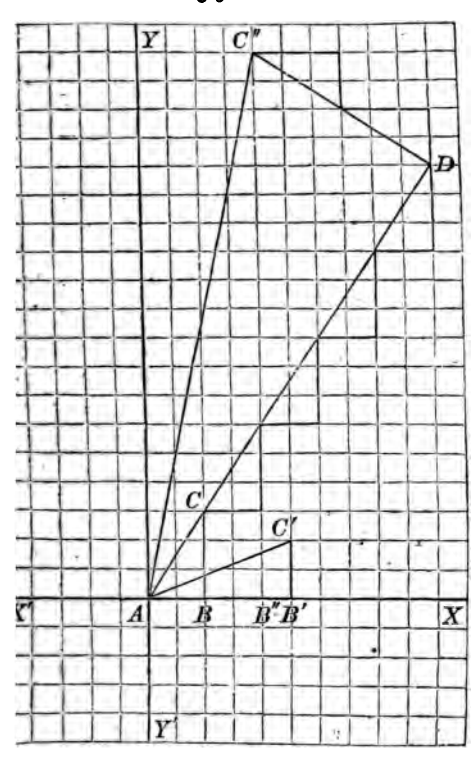
$$r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.\,r'\,(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$
$$= rr'\,(\cos\overline{\varphi + \varphi'} + i\sin\overline{\varphi + \varphi'}).$$

heißt man multiplicirt die Moduli und addirt die nkel.

Beweis. Es seien C und C', Fig. 5, die beiden Punkte der hlen-Ebene, denen die complexen Zahlen r (cos φ + i sin φ) und cos φ' + i sin φ') zugehören, also

$$AC = r\,,\ CAB = \varphi$$
$$AC' = r'\,,\ C'AB' = \varphi'.$$

Fig. 5.



Führt man die Construction des §. 136 aus und zieht AC'', so stellt diese Linie den Modulus und $C''AB''$ den Winkel des gesuchten Products dar. Nun ist in Folge der Entstehung des Punktes C'' nach §. 136

$$\Delta AB'C' \backsim \Delta ADC''.$$

Hieraus folgt

1) $AB' : AD = AC' : AC''$

und weil außerdem

$AB' : AD = 1 : AC$

so ist auch

$1 : AC = AC' : AC''$

d. i.

$$1 : r = r' : AC''$$

also

$$AC'' = rr'.$$

rner folgt

$$2)\quad C''AD = C'AB'$$

i.

$$C''AD = \varphi'$$

so

$$C''AB'' = \varphi + \varphi'.$$

Demnach wird das gesuchte Product

$$rr' (\cos \overline{\varphi + \varphi'} + i \sin \overline{\varphi + \varphi'})$$

wie oben.

Anmerkung. Zu demselben Resultate gelangt man auch, man die beiden gegebenen complexen Zahlen nach dem Lel §. 137 multiplicirt. Denn alsdann erhält man das Product

$$rr' (\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi')$$
$$+ i\, rr' (\sin \varphi \cos \varphi' + \cos \varphi \sin \varphi')$$

welcher Ausdruck nach §. 33 der Trigonometrie auf dasselbe hi kommt wie (1).

Man kann bemerken, daß wenn die Formeln für den Sinus den Cosinus der Summe zweier Winkel nicht schon im §. 3 Trigonometrie gegeben wären, man sie hier aus der Gleichs von (1) und (2) hätte finden können.

Fig. 6.

§. 140.

Zusatz. Die tauschung der toren eines Pro complexer Zahler auf dieses Pr keinen Einfluß.

Dies folgt eben s aus §. 137 wie auc §. 139.

In Fig. 6 wird Satz anschaulich stellt. Wenn ma dem Producte

$r (\cos \varphi + i \sin$

$r' (\cos \varphi' + i \sin$

den ersten Factor Multiplicanden n so kann man die M plication so ansehe

werde dem anfänglichen Systeme quadratisch geordneter Punkte ein neues System eben solcher Punkte eingefügt, welches gegen das anfängliche eine Drehung $= \varphi$ und eine in dem Verhältnisse $1 : r$ vergrößerte Einheit besitzt. Aehnliches gilt, wenn man den andern Factor zum Multiplicanden nimmt. In der Figur werden diese beiden neuen Systeme für das vorige Beispiel $(2 + 3i)(5 + 2i) = 4 + 19i$ zur Anschauung gebracht. Das erste System hat die Einheit AC und seine Achse fällt in AD; das zweite System hat die Einheit AC' und seine Achse fällt in AD'; beide Systeme haben die Punkte A und C'' mit einander gemein.

§. 141.

Zusatz. Die Division complexer Zahlen wird ausgeführt, indem man den Dividend mit dem Umgekkhrten des Divisors multiplicirt.

Man sehe Arithm. §. 102.

Um das Umgekehrte einer gegebenen complexen Zahl zu finden, kann man verfahren wie folgt:

1) Soll das Product

$$(a + ib)(a' + ib')$$

den Werth 1 annehmen, so muß man nach §. 131 haben

$$aa' - bb' = 1$$
$$ab' + a'b = 0$$

woraus folgt

$$a' = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad b' = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

und mithin ist in der algebraischen Form der complexen Zahlen

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

2) Soll das Product

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \,.\, r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

den Werth 1 annehmen, so wird ebenso gefordert

$$rr'\cos(\varphi + \varphi') = 1$$
$$rr'\sin(\varphi + \varphi') = 0$$

folglich

$$r' = \frac{1}{r} \quad , \quad \varphi' = -\varphi$$

und mithin ist in der trigonometrischen Form der complexen Zahlen

$$\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos\overline{-\varphi} + i\sin\overline{-\varphi}).$$

Mit Anwendung dieser Werthe folgt für die Ausführung der Division: 1) in der algebraischen Form der complexen Zahlen

$$\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i.\frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}$$

und 2) in der trigonometrischen Form der complexen Zahlen

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r}{r'}(\cos\overline{\varphi - \varphi'} + i\sin\overline{\varphi - \varphi'})$$

d. h. man dividirt die Moduli und subtrahirt die Winkel.

Potenzen mit reellen Exponenten.

§. 142.

Lehrsatz. Es ist für jeden reellen Werth des Exponenten m

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).,$$

Oder: Um eine gegebene complexe Zahl, in der trigonometrischen Form derselben, mit einem gegebenen reellen Exponenten zu potenziren, potenzirt man den Modulus und multiplicirt den Winkel mit diesem Exponenten.

Beweis. 1) Es sei m eine absolute ganze Zahl. Dann folgt unmittelbar durch wiederholte Anwendung von §. 139

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

2) Es sei m eine negative ganze Zahl $= -k$. Dann hat man zunächst aus §. 141

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{-1} = r^{-1}(\cos\overline{-\varphi} + i\sin\overline{-\varphi})$$

und mithin, indem man dieses Resultat nach 1) weiter mit k potenzirt

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{-k} = r^{-k}(\cos\overline{-k\varphi} + i\sin\overline{-k\varphi}).$$

3) Es sei m ein Bruch $= \frac{k}{n}$. Setzt man zunächst nur den Exponenten $= \frac{1}{n}$, so ist dies der Fall der gewöhnlichen Wurzelausziehung und man erhält

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

wie man leicht durch die Probe der Wurzelausziehung bestätigt finden kann. Wird dieses Resultat weiter nach 1) mit k potenzirt, so folgt

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{k}{n}} = r^{\frac{k}{n}}\left(\cos\frac{k\varphi}{n} + i\sin\frac{k\varphi}{n}\right).$$

Anmerkung 1. Soll die Potenzirung einer complexen Zahl in der algebraischen Form derselben ausgeführt werden, so kann man die Binomialreihe anwenden. Dieses Verfahren bietet aber wenig hervortretende Eigenschaften der Potenz und findet nur selten Anwendung.

Anmerkung 2. Setzt man in der Gleichung des obigen Lehrsatzes $r = 1$, so hat man

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi$$

welche Gleichung nach ihrem ersten Erfinder die Binomialformel von Moivre genannt wird.

Wenn man in dieser Gleichung die linke Seite nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, so erhält man

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos\varphi^m - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos\varphi^{m-2}\sin\varphi^2 + \ldots$$
$$+ i\left(m\cos\varphi^{m-1}\sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos\varphi^{m-3}\sin\varphi^3 + \ldots\right)$$

und folglich hat man (§. 131)

$$\cos m\varphi = \cos\varphi^m - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos\varphi^{m-2}\sin\varphi^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos\varphi^{m-4}\sin\varphi^4 - \ldots$$

$$\sin m\varphi = m \cos\varphi^{m-1} \sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos\varphi^{m-3} \sin\varphi^3 + \ldots$$

welche beiden Gleichungen den Cosinus und den Sinus eines beliebigen Vielfachen eines Winkels durch den Cosinus und den Sinus des einfachen Winkels ausdrücken und von sehr häufiger Anwendung sind. Durch die Methoden der gewöhnlichen Trigonometrie würde man diese beiden Gleichungen nur auf sehr umständliche Weise finden. Die Aufgabe §. 35 der Trigonometrie behandelt hiervon nur den einfachsten Fall, wo man hat $m = 2$.

§. 143.

Lehrsatz. **Jede Potenz einer complexen Zahl mit gebrochenem Exponenten hat so viele von einander verschiedene Werthe, wie der Nenner dieses Exponenten anzeigt.**

Oder: Jede Wurzel aus einer complexen Zahl hat so viele von einander verschiedene Werthe, wie der Wurzel-Exponent anzeigt.

Beweis. Wenn man in der complexen Zahl

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

den Winkel φ um ein beliebiges Vielfaches von 2π vergrößert, so bleibt nach §. 131 die complexe Zahl ungeändert, weil diese Vergrößerung weder auf den Cosinus noch auf den Sinus des Winkels einen Einfluß übt, d. h. man kann statt dieser complexen Zahl immer schreiben

$$r(\cos\overline{\varphi + 2h\pi} + i\sin\overline{\varphi + 2h\pi}),$$

wo h eine beliebige algebraische ganze Zahl bedeutet.

Wird aus dieser complexen Zahl die $n$te Wurzel gezogen, so folgt nach dem vorigen Paragraphen

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2h\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)$$

und dieses Resultat wird im Allgemeinen verschiedene Werthe annehmen, je nachdem man für h andere und andere Zahlen an die Stelle setzt. Aber man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck der Wurzel im Ganzen nur n von einander verschiedene Werthe

besitzt, welche man sämmtlich erhält, indem man für h der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... $n-1$ setzt, und welche mithin den Winkeln entsprechen

$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi+2\pi}{n}, \frac{\varphi+4\pi}{n}, \frac{\varphi+6\pi}{n}, \ldots \frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}.$$

Denn nimmt man für h irgend einen anderen Werth, n, $n+1$, $n+2$, 2c., so erhält man einen Winkel, welcher von einem der hier geschriebenen um 2π oder ein Vielfaches von 2π verschieden ist und deshalb wieder dieselbe complexe Zahl liefert wie dieser. Die sämmtlichen Werthe der $n$ten Wurzeln aus $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sind mithin folgende:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)$$

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

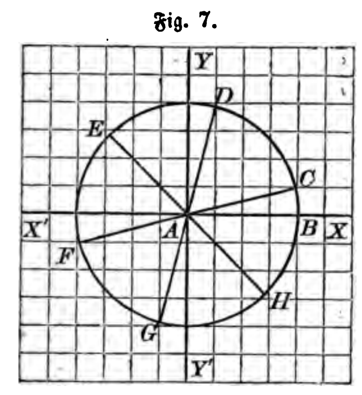
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Jeder dieser Werthe hält die Probe aus, mit dem Exponenten n potenzirt die complexe Zahl $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ wieder hervorzubringen.

Geometrisch betrachtet, liegen die Punkte der Zahlen-Ebene, denen diese verschiedenen Werthe der Wurzel zugehören, auf der Peripherie eines aus dem Nullpunkte als Mittelpunkt beschriebenen Kreises vom Halbmesser $r^{\frac{1}{n}}$, um je den $n$ten Theil dieser Peripherie von einander entfernt. Man sehe z. B. Fig. 7, wo die verschiedenen Werthe der 6ten Wurzel aus $4096\,i$ d. i. aus $4^6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ durch die sechs Punkte C, D, E,

Fig. 7.



F, *G*, *H* zur Anschauung gebracht werden. Diese Punkte liegen auf der Peripherie eines aus dem Nullpunkte *A* als Mittelpunkt beschriebenen Kreises vom Halbmesser 4, und zerlegen diese Peripherie in sechs gleiche Theile. Der Punkt *C* insbesondere hat die Lage, daß der Winkel *CAB* den sechsten Theil von $\frac{\pi}{2}$ ausmacht. Jeder dieser sechs Punkte hält die Probe aus, daß die 6te Potenz wieder zu der Zahl 4096 *i* führt.

Die sechs Wurzeln selbst sind, nach den obigen Formeln ausgerechnet,

$$4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 3{,}864 + 1{,}035\, i$$

$$4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = 1{,}035 + 3{,}864\, i$$

$$4\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right) = -\ 2{,}828 + 2{,}828\, i$$

$$4\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) = -\ 3{,}864 - 1{,}035\, i$$

$$4\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) = -\ 1{,}035 - 3{,}864\, i$$

$$4\left(\cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12}\right) = 2{,}828 - 2{,}828\, i.$$

Die Summe dieser sechs Wurzeln hat, wie man leicht bemerkt, den Werth Null.

Wie hieraus der Fall erledigt werden kann, wo der Exponent der Potenz ein beliebiger Bruch ist, der jedoch als reducirter Bruch vorausgesetzt werden muß, leuchtet von selbst ein.

Anmerkung 1. Die obigen Werthe der *n*ten Wurzel aus der complexen Zahl $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kann man mit Rücksicht auf die §§. 139 und 142 auch schreiben wie folgt

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2$$

. . . .

. . . .

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{n-1}$$

d. h. wenn man irgend einen dieser Werthe bereits kennt, so findet man alle übrigen, indem man jenen successive mit

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \ldots\ \omega^{n-1}$$

multiplicirt, wo unter ω der Werth

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

zu verstehen ist.

Anmerkung 2. In dem besonderen Falle der Quadratwurzel-Ausziehung kann das Resultat der obigen Rechnung auch in der algebraischen Form dargestellt werden wie folgt.

Es sei zu suchen $\sqrt{a+ib}$. Bringt man die gegebene complexe Zahl auf die trigonometrische Form, so hat man zu setzen

$$a+ib=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

und dann wird

$$\sqrt{a+ib}=r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (1)$$

Nun hat man aus §. 130

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\,,\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

und aus §. 36 der Trigonometrie ist

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}\,,\quad \sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}.$$

folglich

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2\sqrt{a^2+b^2}}}\,,\quad \sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2\sqrt{a^2+b^2}}}$$

wo die Wurzeln mit Ausnahme von $\sqrt{a^2+b^2}$, welche stets positiv ist, im Allgemeinen eben sowohl positiv wie negativ genommen werden können.

Substituirt man diese Werthe in (1), so folgt schließlich

$$\sqrt{a+ib}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \qquad (2)$$

welcher Ausdruck in Folge der doppelten Vorzeichen der Wurzeln bereits die beiden Werthe der gesuchten Quadratwurzel in sich

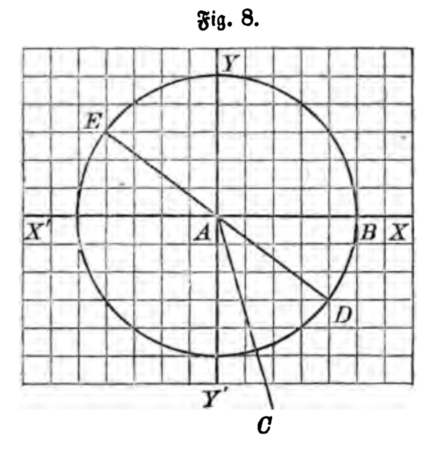
enthält. Welche Vorzeichen zu setzen sind, ergiebt sich leicht aus der Erwägung des Umstandes, in welche Quadranten der Zahlen-Ebene (s. §. 129 Anm.) diese beiden Werthe fallen müssen.

Es sei z. B. die Quadratwurzel aus $7 - 24i$ zu ziehen. Die vorstehende Formel giebt

$$\sqrt{7 - 24i} = \pm 4 \pm 3i$$

und mit Rücksicht auf die Quadranten, in welche die beiden Werthe der gesuchten Wurzel fallen müssen, werden diese Werthe $4 - 3i$ und $-4 + 3i$. Man sehe Fig. 8, wo die Punkte D und E diese beiden Werthe der Wurzel darstellen, während der Punkt C der gegebenen Zahl $7 - 24i$ zugehört. Winkel BAC ist hier negativ, Winkel BAD die Hälfte desselben, und AE die Verlängerung von AD.

Fig. 8.



Eine ähnliche algebraische Formel für Cubikwurzel-Ausziehung kann es nicht geben. Es wurde schon in der Planimetrie bemerkt, daß es nicht möglich ist, durch die Hülfsmittel der Elementar-Geometrie einen gegebenen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen. Eben deshalb läßt sich auch keine Formel ableiten, welche $\cos \frac{\varphi}{3}$ und $\sin \frac{\varphi}{3}$ durch $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ in geschlossener Form ausdrückt, und man sieht also, daß die Unmöglichkeit der Trisectio anguli (Planim. §. 87) mit der Unmöglichkeit der Cubikwurzel-Ausziehung aus complexen Zahlen, in der algebraischen Form dieser Zahlen, eins und dasselbe ist.

§. 144.

Zusatz. Sämmtliche Wurzeln aus reellen Zahlen werden durch die beiden Gleichungen dargestellt

$$(+r)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}\right)$$

$$(-r)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{(2h+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2h+1)\pi}{n}\right)$$

wo r den Zahlwerth der reellen Zahl bedeutet und man für h der Reihe nach die Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ zu setzen hat.

Diese Gleichungen folgen aus dem vorigen Paragraphen, die erste indem man daselbst $\varphi = 0$, und die zweite indem man $\varphi = \pi$ setzt.

Nimmt man $r = 1$, so hat man insbesondere die Wurzeln aus der positiven oder negativen Einheit

$$(+1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}$$

$$(-1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{(2h+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2h+1)\pi}{n}$$

durch deren Multiplication mit $r^{\frac{1}{n}}$ man die obigen Werthe wieder erhält.

Hiernach hat z. B. die Quadratwurzel aus $+1$ die beiden Werthe $+1$ und -1; die Quadratwurzel aus -1 die beiden Werthe $+i$ und $-i$; die Cubikwurzel aus $+1$ die drei Werthe

$$+1\,,\quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;$$

die Cubikwurzel aus -1 die drei Werthe

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\quad -1\,,\quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;$$

u. s. w.

Die Werthe §. 143 Anm. 1

$$1\,,\quad \omega\,,\quad \omega^2\,,\quad \omega^3\,,\quad \ldots\quad \omega^{n-1}$$

wo ω die Bedeutung hat

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

sind, wie man leicht bemerkt, nichts anderes als sämmtliche Werthe der $n$ten Wurzel aus $+1$. Die Summe dieser Werthe ist jederzeit gleich Null.

Allgemein kann man aus allem Vorstehenden noch den Schluß hinzufügen, daß jede Wurzelausziehung hier ausführbar ist, d. h. daß diejenige Schwierigkeit, welche in der niederen Arithmetik sich der Ausführung gewisser Wurzelausziehungen entgegenstellte und welche an der Natur der Vorzeichen haftete (Arithm. §§. 192 und 193), in dem Gebiete der complexen Zahlen nicht mehr stattfindet.

Potenzen mit complexen Exponenten.

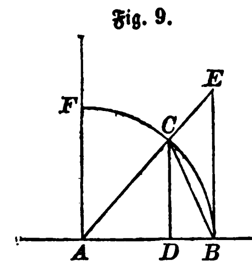
§. 145.

Lehrsatz. Es ist für unendlich abnehmende Werthe von α

$$\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Beweis. Wenn man in einem beliebigen spitzen Winkel BAC, Fig. 9, aus dem Scheitelpunkte A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AB = 1$ den Kreisbogen BC zieht, aus C das Perpendikel CD fällt und in B das Perpendikel BE errichtet, so ist, wenn man den Bogen $BC = \alpha$ setzt, $DC = \sin \alpha$ und $BE = \tan \alpha$, und man hat unmittelbar aus der Figur

Fig. 9.



$$\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$$

d. h. der Bogen α ist immer zwischen $\sin \alpha$ und $\tan \alpha$ enthalten.

Um dies zu beweisen, kann man den Satz der Planimetrie §. 80 Anmerk. zu Hülfe nehmen. Man kann aber auch bemerken, daß $\sin \alpha$ die doppelte Fläche des Dreiecks ABC, α die doppelte Fläche des Sectors ABC, und $\tan \alpha$ die doppelte Fläche des Dreiecks ABE ausdrückt.

Daraus folgt weiter

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$$

wofür man auch setzen kann

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha$$

d. h. es ist $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ seinem Werthe nach immer zwischen 1 und $\cos \alpha$ enthalten.

Läßt man nun α ohne Aufhören abnehmen, so ist $\lim \cos \alpha = 1$, folglich um so mehr auch $\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

§. 146.

Lehrsatz. Es ist für jeden Werth von x

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Beweis. Um $\cos x + i \sin x$ in eine nach der Hauptzahl x geordnete Reihe zu entwickeln, kann man das im §. 16 beschriebene Verfahren anwenden, indem man diesen Ausdruck gleich einer Reihe mit vorläufig unbestimmten Coefficienten setzt

$$\cos x + i \sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \quad (1)$$

Dann ist auch, indem y statt x gesetzt wird

$$\cos y + i \sin y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots$$

folglich

$$\cos y - \cos x + i (\sin y - \sin x) = a_1 (y - x) + a_2 (y^2 - x^2) + a_3 (y^3 - x^3) + \ldots$$

und wenn man auf der linken Seite dieser Gleichung die entsprechenden Formeln zur Verwandlung der Differenzen trigonometrischer Zahlen in Producte (Trigonometrie §. 38) anwendet, so hat man

$$-2 \sin \frac{y+x}{2} \sin \frac{y-x}{2} + 2 i \cos \frac{y+x}{2} \sin \frac{y-x}{2} = a_1 (y - x) + a_2 (y^2 - x^2) + a_3 (y^3 - x^3) + \ldots$$

Wird diese Gleichung durch $y - x$ dividirt, so folgt

$$-\sin \frac{y+x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{y-x}{2}}{\frac{y-x}{2}} + i \cos \frac{y+x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{y-x}{2}}{\frac{y-x}{2}} = a_1 + a_2 \frac{y^2 - x^2}{y - x} + a_3 \frac{y^3 - x^3}{y - x} + \ldots$$

und läßt man hierin die Differenz $y - x$ unendlich abnehmen, so erhält man unter Anwendung der Lehrsätze §. 41 und §. 145

$$-\sin x + i \cos x = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \ldots \quad (2)$$

Die beiden Entwickelungen (1) und (2) müssen identisch werden, wenn man die erste mit i multiplicirt. Man hat also nach §. 15

$$a_1 = i\, a_0$$

$$2 a_2 = i\, a_1 \quad \text{woraus} \quad a_2 = \frac{i\, a_1}{2} = -\frac{a_0}{1.2}$$

$$3 a_3 = i\, a_2 \quad \text{„} \quad a_3 = \frac{i\, a_2}{3} = -\frac{i\, a_0}{1.2.3}$$

ꝛc. ꝛc.

und mithin wird

$$\cos x + i \sin x = a_0 + i\, a_0\, x - \frac{a_0}{1.2} x^2 - \frac{i\, a_0}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

Um noch den Coefficienten a_0 zu bestimmen, setze man $x = 0$. Dann wird aus dieser letzten Gleichung

$$1 = a_0$$

und man erhält endlich

$$\cos x + i \sin x = 1 + i\, x - \frac{x^2}{1.2} - \frac{i\, x^3}{1.2.3} + \ldots$$

oder durch Trennung der reellen und der rein imaginären Glieder

$$\cos x + i \sin x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$
$$+ i \left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \right). \quad (3)$$

Genau dieselbe Reihe entsteht aber, wenn man in der Entwickelung von e^x, §. 52, den Werth $i\,x$ an die Stelle von x setzt, womit der Lehrsatz bewiesen ist.

Anmerkung. Eine noch naturgemäßere Reihen-Entwickelung von $\cos x + i \sin x$ als die obige ergiebt sich, wenn man nach der Binomialformel von Moivre setzt

$$\cos x + i \sin x = \left(\cos \frac{x}{m} + i \sin \frac{x}{m} \right)^m$$

hierin die rechte Seite nach der Binomialreihe entwickelt und darauf m unendlich groß werden läßt, wodurch man gleichfalls zu der Gleichung (3) gelangt. Jedoch macht diese Ableitung verschiedene Nebenbetrachtungen nöthig, durch welche sie weniger einfach wird.

Den vorstehenden Lehrsatz hat zuerst Euler gegeben.

§. 147.

Lehrsatz. Die trigonometrischen Zahlen eines jeden Winkels können durch imaginäre Potenzen ausgedrückt werden wie folgt:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

Beweis. Wenn man in der Gleichung

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

den Werth $-x$ statt x setzt, so folgt

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen liefert die obigen Werthe von $\cos x$ und $\sin x$, aus denen $\operatorname{tang} x$ auf bekannte Weise folgt.

§. 148.

Lehrsatz. Die Potenz der Basis e mit einem complexen Exponenten wird

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \qquad (1)$$

Beweis. Man hat

$$e^{x+iy} = e^x \,.\, e^{iy}$$

woraus nach §. 146 das Weitere folgt.

Wenn die gegebene Basis $= a$ verschieden von e ist, so läßt sich die Potenzirung leicht auf die vorige zurückführen. Denn man hat immer

$$a^{x+iy} = e^{la.(x+iy)}$$

wo la den natürlichen Logarithmus von a bedeutet, folglich

$$a^{x+iy} = a^x (\cos \overline{yla} + i \sin \overline{yla}). \qquad (2)$$

§. 149.

Lehrsatz. Der natürliche Logarithmus einer complexen Zahl wird durch die Gleichung gegeben

$$l.\, r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = lr + i(\varphi + 2h\pi) \qquad (1)$$

wo man für h jede beliebige algebraische ganze Zahl setzen darf.

Beweis. Aus dem vorigen Lehrsatze folgt

$$l.\, e^x(\cos y + i\sin y) = x + iy.$$

Setzt man hierin $e^x = r$, also $x = lr$, und ferner $y = \varphi + 2h\pi$, wo h eine beliebige algebraische ganze Zahl ist, so erhält man die obige Gleichung.

Der Logarithmus einer complexen Zahl für eine beliebige Basis a, verschieden von e, läßt sich leicht auf den vorigen Fall zurückführen. Denn man hat

$$\overset{a}{\log}.\, r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{l.\, r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{la}$$

folglich

$$\overset{a}{\log}.\, r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \overset{a}{\log} r + i\,\frac{\varphi + 2h\pi}{la} \qquad (2)$$

wo h dieselbe Bedeutung hat wie vorhin.

Man sieht hieraus, daß jeder Logarithmus einer complexen Zahl unendlich viele Werthe hat, welche sich durch die verschiedenen Werthe von h von einander unterscheiden.

Anmerkung. Setzt man in diesem Lehrsatze $r = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$li = i\,\frac{(4h+1)\pi}{2}$$

woraus folgt

$$\frac{(4h+1)\pi}{2} = \frac{li}{i}$$

und für die besondere Annahme $h = 0$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{li}{i}$$

welcher Ausdruck indessen zur Berechnung der Zahl π wenig geeignet ist.

§. 150.

Zusatz. Die natürlichen Logarithmen aller reellen Zahlen werden durch die beiden Gleichungen dargestellt

$$l(+r) = lr + i.2h\pi$$
$$l(-r) = lr + i.(2h+1)\pi$$

wo r den Zahlwerth der reellen Zahl bedeutet und man für h jede beliebige algebraische ganze Zahl setzen darf.

Diese Gleichungen folgen aus dem vorigen Paragraphen, die erste indem man daselbst $\varphi = 0$, und die zweite indem man $\varphi = \pi$ setzt.

Nimmt man $r = 1$, so hat man insbesondere die natürlichen Logarithmen der positiven oder negativen Einheit

$$l(+1) = i.2h\pi$$
$$l(-1) = i.(2h+1)\pi$$

durch deren Addition zu lr man die obigen Werthe wieder erhält.

Die Logarithmen für jede andere Basis a werden gefunden, indem man die vorstehenden Resultate durch la dividirt.

Hieraus sieht man z. B., daß der Briggische Logarithmus einer jeden positiven Zahl unendlich viel Werthe hat, von denen nur einer reell ist, welcher dem Werthe $h = 0$ entspricht. Dieser Werth ist derselbe, den die Tafeln geben. Der Briggische Logarithmus einer jeden negativen Zahl hat gleichfalls unendlich viel Werthe, die aber sämmtlich imaginär sind. Mit diesen Logarithmen kann man übrigens ebenso numerische Rechnungen führen, wie es mit den gewöhnlichen Logarithmen geschieht. Es sei $\sqrt[3]{-64}$ mit Logarithmen zu berechnen. Man setze

$$\log(-64) = 1{,}80618 + i\,\frac{(2h+1)\pi}{l\,10}$$
$$:3$$
$$\log\sqrt[3]{-64} = 0{,}60206 + i\,\frac{(2h+1)\pi}{3\,l\,10}$$

und dazu ist die zugehörige Zahl (§. 148)

$$\sqrt[3]{-64} = 4\left(\cos\frac{(2h+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(2h+1)\pi}{3}\right)$$

übereinstimmend mit §. 144.

Allgemein kann man hier wieder den Schluß hinzufügen, daß auch für die Logarithmen diejenige Schwierigkeit, welche in der niederen Arithmetik sich der allgemeinen Berechnung derselben entgegenstellte und welche an der Natur der Vorzeichen haftete (Arithm. §. 266), in dem Gebiete der complexen Zahlen nicht mehr vorhanden ist.

Zehnter Abschnitt.

Entwickelung der trigonometrischen Reihen und der Arcusreihen.

Die trigonometrischen Reihen.

§. 151.

Erklärung. Unter den trigonometrischen Reihen versteht man diejenigen unendlichen Reihen, welche durch die Entwickelungen von sin x, cos x und tang x nach der Hauptzahl x entstehen.

Im vorigen Abschnitte hat sich gezeigt, wie durch die allgemeine Darstellung der complexen Zahlen die trigonometrischen Zahlen in die Analysis gelangen. Aus der Trigonometrie ist aber bekannt, daß die trigonometrischen Zahlen meistentheils irrational sind, und es tritt deshalb an dieser Stelle noch die Aufgabe ein, die trigonometrischen Zahlen in unendliche Reihen zu entwickeln, auf ähnliche Weise, wie solches mit den Potenzen im III. Abschnitte und mit den Logarithmen im IV. Abschnitte geschehen ist. Es soll jedoch hier diese Aufgabe nur auf die drei oben genannten trigonometrischen Zahlen beschränkt werden, von denen die drei anderen cot x, sec x und cosec x lediglich die Umkehrungen sind.

Unter dem Winkel x versteht man hier, wie schon im §. 130 bemerkt wurde, die zugehörige Bogenlänge für den Halbmesser Eins,

und die trigonometrischen Zahlen sind hier in der Auffassung des §. 145, oder gleichfalls für den Halbmesser Eins, zu nehmen. Denn auf diese Weise werden Winkel und trigonometrische Zahlen Größen von einerlei Art, die durch eine und dieselbe Einheit gemessen werden, und es wird damit die Möglichkeit gegeben, die trigonometrischen Zahlen durch den Winkel allgemein auszudrücken.

§. 152.

Erklärung. Unter der Zahl ϱ versteht man die Anzahl der Grade, oder Minuten, oder Secunden, welche ein Kreisbogen umfaßt, der seinem Halbmesser gleich ist.

Diese Zahl ist also

für Grade $\varrho = \frac{180}{\pi} = 57{,}2958$

für Minuten $\varrho = \frac{180.60}{\pi} = 3437{,}75$

für Secunden $\varrho = \frac{180.60.60}{\pi} = 206264{,}8.$

Der Gebrauch dieser Zahlen ist folgender:

1) Um einen Winkel, der in Bogenlänge für den Halbmesser Eins ausgedrückt ist, in Grade oder Minuten oder Secunden zu verwandeln, hat man ihn mit dem entsprechenden Werthe von ϱ zu multipliciren.

2) Um einen Winkel, der in Graden oder Minuten oder Secunden ausgedrückt ist, in Bogenlänge für den Halbmesser Eins zu verwandeln, hat man ihn durch den entsprechenden Werth von ϱ zu dividiren.

Z. B. ein Winkel, dessen Bogenlänge für den Halbmesser Eins $= 0{,}1$ ist, beträgt in Secunden

$$0{,}1 \,.\, 206264{,}8 = 20626'',48$$

$$\text{d. i.} = 5^\circ\ 43'\ 46'',48;$$

und ein Winkel von 12° beträgt in Bogenlänge für den Halbmesser Eins ausgedrückt

$$\frac{12}{57{,}2958} = 0{,}20944.$$

Man kann zur Erleichterung dieser Umwandlungen, welche sehr häufige Anwendung finden, auch eine Tafel entwerfen; s. d. IV. Tafel in des Verf. logarithmisch-trigonometrischen Tafeln S. 98.

§. 153.

Lehrsatz. Die Entwickelung von $\sin x$ und $\cos x$ giebt folgende nach der Hauptzahl x geordnete Reihen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \text{ in inf.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \text{ in inf.}$$

Der Beweis ist schon im §. 146 enthalten, wo diese Reihen aus der Gleichung (3) hervorgehen, wenn man daselbst die reellen Theile für sich und die rein imaginären Theile für sich einander gleich setzt.

Man kann auch bemerken, daß diese Reihen nichts anderes sind als die Entwickelungen der im §. 147 für diese beiden trigonometrischen Zahlen gegebenen imaginären Potenz-Ausdrücke, sobald man auf diese den Lehrsatz §. 52 anwendet.

Die Convergenz beider Reihen für jeden Werth von x folgt schon aus ihrer Herleitung, kann aber auch selbständig aus §. 14 bewiesen werden, da das Bildungsgesetz ihrer Coefficienten unmittelbar vorliegt. Diese Reihen sind also zu numerischen Rechnungen sofort brauchbar und werden jederzeit rasch convergiren, da man Sinus und Cosinus für Werthe von x, welche größer als $\frac{\pi}{4}$ sind, niemals zu berechnen nöthig hat.

Beispiel. Es seien Sinus und Cosinus von 22° zu berechnen. Man hat zunächst nach dem vorigen Paragraphen zu setzen:

$$x = \frac{22}{57{,}2958} = 0{,}383972.$$

und erhält hierauf 1) für $\sin x$:

$x =$	$0{,}383972$	$-\frac{x^3}{1.2.3} =$	$-\ 0{,}009435$
$+\frac{x^5}{1.2.3.4.5} =$	$0{,}000070$	$-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} =$	$-\ 0{,}000000$
	$0{,}384042$		$-\ 0{,}009435$

$$\sin\ 22° = 0{,}374607$$

2) für $\cos x$:

$$1 = 1{,}000000 \qquad - \frac{x^2}{1.2} = -0{,}073717$$

$$+\frac{x^4}{1.2.3.4} = 0{,}000906 \qquad - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} = -0{,}000004$$

$$1{,}000906 \qquad -0{,}073721$$

$$\cos 22^\circ = 0{,}927185.$$

Man vergleiche hiermit die sehr umständlichen Methoden, welche die ebene Trigonometrie für verschiedene Winkel lehrt, während hier das Verfahren für alle Winkel gleich einfach bleibt.

§. 154.

Zusatz. Wenn der Winkel x sehr klein ist, so kann man setzen

$$\sin x = x\,, \quad \cos x = 1.$$

Diese Gleichungen, von denen ein sehr häufiger Gebrauch gemacht wird, setzen voraus, daß jede der beiden Reihen des vorigen Paragraphen sich auf ihr erstes Glied reducirt, also der Inbegriff aller folgenden Glieder für den geforderten Grad von Genauigkeit verschwindend klein ist.

Es läßt sich leicht nachweisen, bis zu welcher Größe des Winkels x man die vorstehenden beiden Gleichungen gebrauchen darf, sobald der Grad von Genauigkeit, mit welchem man rechnen will, gegeben ist. Setzt man z. B. fest, daß die Werthe der Sinus und Cosinus auf fünf Decimalstellen genau sein sollen, so wird die Gleichung $\sin x = x$ richtig sein, so lange man hat

$$\frac{x^3}{1.2.3} < 0{,}000005$$

$$\text{d. i.} \quad x < 0{,}03107$$

oder bis zu dem Winkel $1^\circ\ 46'\ 48''$.

Unter derselben Voraussetzung wird die Gleichung $\cos x = 1$ richtig sein, so lange man hat

$$\frac{x^2}{1.2} < 0{,}000005$$

$$\text{d. i.} \quad x < 0{,}00316$$

oder bis zu dem Winkel $0^\circ\ 10'\ 50''$.

Die zweite Gleichung hat also eine viel engere Grenze ihrer Gültigkeit als die erste. Soll diese Grenze weiter ausgedehnt werden, so muß man setzen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

was unter der obigen Voraussetzung bis nahe an 6° richtig ist.

Anmerkung. Maskelyne machte die Bemerkung, daß man für erheblich größere Winkel als vorhin noch immer hinreichend genau verfahre, wenn man setzt

$$\sin x = x \sqrt[3]{\cos x}.$$

Denn es ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

folglich

$$\sqrt[3]{\cos x} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots\right)$$
$$- \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots\right)^2$$
$$\dots\dots$$
$$= 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} - \dots$$

$$x\sqrt[3]{\cos x} = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{72} - \dots$$

und da man hat

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

so beträgt der Unterschied dieser beiden Entwickelungen nur

$$\sin x - x\sqrt[3]{\cos x} = \frac{x^5}{45} \dots.$$

und kann also für hinreichend kleine Werthe von x vernachlässigt werden. So z. B. für Rechnungen mit fünf genauen Decimalstellen wird die Gleichung $\sin x = x\sqrt[3]{\cos x}$ richtig sein, so lange man hat

$$\frac{x^5}{45} < 0{,}000005$$

$$\text{d. i.} \quad x < 0{,}18640$$

oder bis zu dem Winkel 10° 40′.

Der Gebrauch dieser Maskelyne'schen Gleichung setzt voraus, daß der Werth von $\cos x$ bekannt sei. Dieser Werth kann aber immer, da $\cos x$ für kleine Winkel sich nur langsam ändert, mit großer Zuverlässigkeit aus einer Tafel genommen werden. Man sehe über diesen Gebrauch des Verf. fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, Einleitung §§. 9 und 10.

§. 155.

Aufgabe. Die Werthe von $\sin(a+b)$ und $\cos(a+b)$ zu berechnen, wenn die Werthe von $\sin a$ und $\cos a$ als bekannt vorausgesetzt werden und b eine kleine Zahl bedeutet.

Auflösung. Wenn man in den Gleichungen

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

den Winkel b so klein annimmt, daß er den Bedingungen des vorigen Paragraphen Genüge leistet, so erhält man

$$\sin(a+b) = \sin a + b \cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a - b \sin a.$$

Beispiel. Es sei gegeben

$$\sin 22^\circ = 0{,}37461 \qquad \cos 22^\circ = 0{,}92718$$

und man sucht $\sin 22^\circ\ 7'\ 30''$ und $\cos 22^\circ\ 7'\ 30''$.

Die Bogenlänge von $7'\ 30''$ ist $b = 0{,}00218$ und es wird

$$b \cos a = 0{,}00202 \qquad b \sin a = 0{,}00082.$$

Also

$$\begin{array}{rl} \sin 22^\circ = & 0{,}37461 \\ & +\ 0{,}00202 \\ \hline \sin 22^\circ\ 7'\ 30'' = & 0{,}37663 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \cos 22^\circ = & 0{,}92718 \\ & -\ 0{,}00082 \\ \hline \cos 22^\circ\ 7'\ 30'' = & 0{,}92636. \end{array}$$

Man vergleiche die trigonometrischen Tafeln.

§. 156.

Aufgabe. Die Logarithmen von $\sin(a+b)$ und $\cos(a+b)$ zu berechnen, wenn die Logarithmen von $\sin a$

und $\cos a$ als bekannt vorausgesetzt werden und b eine kleine Zahl bedeutet.

Auflösung. Man hat mit Rücksicht auf den vorigen Paragraphen

$$\log \sin (a + b) - \log \sin a = \log \frac{\sin a + b \cos a}{\sin a}$$
$$= \log \left(1 + \frac{b}{\operatorname{tang} a}\right)$$
$$\log \cos (a + b) - \log \cos a = \log \frac{\cos a - b \sin a}{\cos a}$$
$$= \log (1 - b \operatorname{tang} a)$$

und wenn man diese Logarithmen in Reihen entwickelt und von den Reihen nur das erste Glied beibehält, so wird

$$\log \left(1 + \frac{b}{\operatorname{tang} a}\right) = \frac{Mb}{\operatorname{tang} a} - \ldots$$
$$\log (1 - b \operatorname{tang} a) = - Mb \operatorname{tang} a - \ldots$$

wo M den Modulus der Briggischen Logarithmen bedeutet.

Also erhält man

$$\log \sin (a + b) = \log \sin a + \frac{Mb}{\operatorname{tang} a}$$
$$\log \cos (a + b) = \log \cos a - Mb \operatorname{tang} a.$$

Beispiel. Es sei gegeben

$$\log \sin 22^\circ = 9{,}57358 \qquad \log \cos 22^\circ = 9{,}96717$$

und man sucht $\log \sin 22^\circ\ 7'\ 30''$ und $\log \cos 22^\circ\ 7'\ 30''$.

Die Bogenlänge von $7'\ 30'' = 450''$ wird nach §. 152

$$b = \frac{450}{206264{,}8}$$

und man erhält

$$\log b = 7{,}33878 - 10$$
$$\log M = 9{,}63778 - 10$$
$$\log (Mb) = 6{,}97656 - 10$$
$$\log \operatorname{tang} a = 9{,}60641 - 10$$
$$\log \frac{Mb}{\operatorname{tang} a} = 7{,}37015 - 10 \qquad \frac{Mb}{\operatorname{tang} a} = 0{,}00235$$
$$\log (Mb \operatorname{tang} a) = 6{,}58297 - 10 \qquad Mb \operatorname{tang} a = 0{,}00038$$

Also

$$\begin{array}{rlrl} \log\sin 22^\circ &= 9{,}57358 & \log\cos 22^\circ &= 9{,}96717 \\ & + 0{,}00235 & & - 0{,}00038 \\ \hline \log\sin 22^\circ\,7'\,30'' &= 9{,}57593 & \log\cos 22^\circ\,7'\,30'' &= 9{,}96679. \end{array}$$

Man vergleiche die trigonometrischen Tafeln.

Anmerkung. Man kann bemerken, daß wenn man für b die Bogenlänge für 1 Secunde, d. i. den Bruch

$$\frac{1}{206264{,}8}$$

setzt, die Werthe $\frac{Mb}{\tan a}$ und $Mb \tan a$ identisch sind mit den in den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln angesetzten Differenzen für 1 Secunde, vermittelst deren die gewöhnliche Interpolation ausgeführt wird. Eine ähnliche Bemerkung kann man zu dem vorigen Paragraphen machen.

Wenn der Winkel a klein ist, so hört $\frac{Mb}{\tan a}$ auf ein kleiner Bruch zu sein und das vorstehende Verfahren wird für den Sinus ungenügend. Man muß in diesem Falle mehr Glieder der Reihe entwickeln, oder man kann auch, nachdem der Cosinus berechnet ist, die Gleichung von Maskelyne (§. 154 Anm.) anwenden.

§. 157.

Lehrsatz. Die Entwickelung von $\tan x$ giebt folgende nach der Hauptzahl x geordnete Reihe

$$\tan x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{1.3.5.7.3} + \ldots \text{ in inf.}$$

Der Beweis ergiebt sich, indem man die beiden Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ durch einander dividirt, was nach dem Verfahren des §. 16 geschehen kann.

Das Bildungsgesetz der Coefficienten dieser Reihe ist, wie der Augenschein zeigt, von einer verwickelteren Natur als in den obigen Reihen und kann hier nicht weiter verfolgt werden. Aus diesem Grunde läßt sich auch hier über die Convergenz dieser Reihe keine allgemeine Entscheidung treffen.

§. 158.

Zusatz. Wenn der Winkel x sehr klein ist, so kann man setzen

$$\operatorname{tang} x = x.$$

Diese Gleichung setzt voraus, daß die Reihe des vorigen Paragraphen sich auf ihr erstes Glied reducirt. Für Rechnungen mit fünf genauen Decimalstellen ist sie richtig, so lange man hat

$$\frac{x^3}{1.3} < 0{,}000005$$

$$\text{d. i. } x < 0{,}02466$$

oder bis zu dem Winkel $1^\circ\ 24'\ 46''$.

Anmerkung. Wenn man die Gleichung von Maskelyne (§. 154 Anm.)

$$\sin x = x \sqrt[3]{\cos x}$$

durch $\cos x = \cos x$ dividirt, so erhält man eine zweite Gleichung

$$\operatorname{tang} x = \frac{x}{\sqrt[3]{\cos x^2}}$$

welche in ähnlicher Weise gebraucht werden kann wie die erste.

Die Arcusreihen.

§. 159.

Erklärung. Man versteht unter der Bezeichnung

arc sin z den Winkel, dessen Sinus $= z$ ist,
arc cos z " " " Cosinus $= z$ ist,
arc tang z " " " Tangens $= z$ ist.

Oder wenn x irgend einen Winkel bedeutet, so ist der Sinn dieser Bezeichnung der, daß

aus $\sin x = z$ jederzeit folgt $x = \operatorname{arc} \sin z$,
" $\cos x = z$ " " $x = \operatorname{arc} \cos z$,
" $\operatorname{tang} x = z$ " " $x = \operatorname{arc} \operatorname{tang} z$.

Diese Bezeichnung drückt demnach die Umkehrung von derjenigen der trigonometrischen Zahlen aus. Die Silbe arc ist die Abkürzung des Wortes arcus, Bogen.

Beim Gebrauche dieser Bezeichnung ist die besondere Vorsicht zu beachten, daß jeder dieser Arcus für denselben Werth von z unzählig vieler Werthe fähig ist. Denn wenn man z. B. mit x irgend einen Winkel bezeichnet, so gehört einerlei Sinus zu den Winkeln

$$x\,,\ \pi - x\,,\ 2\pi + x\,,\ 3\pi - x\,,\ \text{rc.}$$

ebenso einerlei Cosinus zu den Winkeln

$$x\,,\ 2\pi - x\,,\ 2\pi + x\,,\ 4\pi - x\,,\ \text{rc.}$$

endlich einerlei Tangens zu den Winkeln

$$x\,,\ \pi + x\,,\ 2\pi + x\,,\ 3\pi + x\,,\ \text{rc.}$$

d. h. die Anzahl der Winkel, welche zu demselben gegebenen Sinus oder Cosinus, oder Tangens gehören, ist unendlich groß. In der Regel versteht man unter dem Arcus den kleinsten aller dieser möglichen Winkel, welcher also für $\text{arc sin } z$ und $\text{arc tang } z$ immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, für $\text{arc cos } z$ immer zwischen 0 und π enthalten sein wird, und damit fällt die Vieldeutigkeit dieser Ausdrücke weg; doch muß diese Beschränkung jedesmal ausdrücklich angezeigt werden.

§. 160.

Erklärung. Unter den Arcusreihen versteht man diejenigen unendlichen Reihen, welche durch die Entwickelung von $\text{arc sin } z$, $\text{arc cos } z$ und $\text{arc tang } z$ nach der Hauptzahl z entstehen.

Die Arcusreihen lösen die umgekehrte Aufgabe von derjenigen der trigonometrischen Reihen. Denn in den letzteren wird die trigonometrische Zahl durch den Winkel, in den ersteren dagegen der Winkel durch die trigonometrische Zahl ausgedrückt.

In den Arcusreihen wird unter dem Arcus immer der kleinste aller möglichen Werthe desselben verstanden, aus welchem jeder andere dieser Werthe leicht hergeleitet werden kann (s. den vorigen Paragraphen).

§. 161.

Lehrsatz. Die Entwickelung von arc tang z giebt folgende nach der Hauptzahl z geordnete Reihe

$$\text{arc tang } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots \text{ in inf.}$$

Beweis. Aus den beiden Gleichungen des §. 147

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

erhält man durch Division

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x}$$
$$= \frac{1 + i \text{ tang } x}{1 - i \text{ tang } x}$$

woraus folgt

$$x = \frac{1}{2i} \cdot l \frac{1 + i \text{ tang } x}{1 - i \text{ tang } x}$$

und wenn man tang $x = z$, also $x =$ arc tang z setzt

$$\text{arc tang } z = \frac{1}{2i} \cdot l \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Nun ist nach §. 58

$$l\,(1 + iz) = \quad iz + \frac{z^2}{2} - \frac{iz^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$
$$l\,(1 - iz) = - iz + \frac{z^2}{2} + \frac{iz^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \ldots$$

folglich

$$l \frac{1 + iz}{1 - iz} = 2i. \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots\right)$$

und endlich

$$\text{arc tang } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots \text{ wie oben.}$$

Die hier erhaltene Reihe convergirt für alle Werthe der Hauptzahl z, welche zwischen -1 und $+1$ enthalten sind, wovon man sich leicht nach §. 14 überzeugen kann.

Anmerkung. Setzt man wieder arc tang $z = x$, so kann man diese Reihe auch schreiben wie folgt

$$x = \text{tang } x - \frac{\text{tang } x^3}{3} + \frac{\text{tang } x^5}{5} - \ldots$$

§. 162.

Lehrsatz. Die Entwickelung von arc sin z und arc cos z giebt folgende nach der Hauptzahl z geordnete Reihen

$$\text{arc sin } z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \ldots \text{ in inf.}$$

$$\text{arc cos } z = \frac{\pi}{2} - z - \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} - \ldots \text{ in inf.}$$

Beweis. 1) Die erste dieser Reihen kann man auf folgende Weise aus der Reihe des vorigen Paragraphen erhalten.

Die aus der Trigonometrie bekannte Gleichung

$$\text{tang } x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin x^2}}$$

giebt

$$x = \text{arc tang } \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin x^2}}$$

oder wenn man $\sin x = z$, d. h. $x = \text{arc sin } z$ setzt

$$\text{arc sin } z = \text{arc tang } \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$$

und indem man auf der rechten Seite dieser Gleichung die Reihen-Entwickelung des vorigen Paragraphen anwendet

$$\text{arc sin } z = z\,(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} z^3\,(1 - z^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{1}{5} z^5\,(1 - z^2)^{-\frac{5}{2}} - \ldots$$

Werden hierin die angezeigten binomischen Potenzen ausgeführt, so kann man die Entwickelung schreiben wie folgt

$$\begin{aligned}\text{arc sin } z = z &+ \frac{3}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{3.5}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \ldots \\ &- \frac{z^3}{3} - \frac{5}{2}\frac{z^5}{5} - \frac{5.7}{2.4}\frac{z^7}{7} - \ldots \\ &+ \frac{z^5}{5} + \frac{7}{2}\frac{z^7}{7} + \ldots \\ &- \frac{z^7}{7} - \ldots\end{aligned}$$

aus deren Zusammenziehung die obige Reihe hervorgeht. Denn man hat nur zu beachten, daß bei der Addition der Glieder, welche mit gleichen Potenzen von z behaftet sind, der im §. 38 Anmerk. bewiesene Satz zur Anwendung kommt, so daß die Summen

$$\frac{3}{2} - 1\,,\ \frac{3.5}{2.4} - \frac{5}{2} + 1\,,\ \frac{3.5.7}{2.4.6} - \frac{5.7}{2.4} + \frac{7}{2} - 1\,,\ \text{rc.}$$

identisch sind nach der Bezeichnung des §. 38 mit

$$\left(\frac{3}{2}\right)_1 + (-1)_1\,,\ \left(\frac{5}{2}\right)_2 + \left(\frac{5}{2}\right)_1 (-1)_1 + (-1)_2\,,$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)_3 + \left(\frac{7}{2}\right)_2 (-1)_1 + \left(\frac{7}{2}\right)_1 (-1)_2 + (-1)_3\,,\ \text{rc.}$$

und folglich geben

$$\left(\frac{1}{2}\right)_1 = \frac{1}{2}\,,\ \left(\frac{3}{2}\right)_2 = \frac{1.3}{2.4}\,,\ \left(\frac{5}{2}\right)_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,,\ \text{rc.}$$

2) Die zweite der obigen Reihen folgt unmittelbar aus der ersten durch die leicht nachweisbare Beziehung

$$\text{arc}\cos z = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin z.$$

Die beiden hier bewiesenen Reihen sind convergirende Reihen, so lange die Hauptzahl z zwischen den Werthen -1 und $+1$ liegt (was vermöge ihrer Natur jederzeit von selbst der Fall ist). Man kann sich davon leicht nach §. 14 überzeugen.

Anmerkung. Setzt man in der ersten dieser Reihen wieder $\text{arc}\sin z = x$ und in der zweiten $\text{arc}\cos z = x$, so kann man diese Reihen auch schreiben

$$x = \sin x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin x^5}{5} + \ldots$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{1}{2}\,\frac{\cos x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\cos x^5}{5} - \ldots$$

§. 163.

Aufgabe. Die Zahl π zu berechnen.

Auflösung. Diese Aufgabe ist eine der hauptsächlichsten Anwendungen der Arcusreihen und bietet dazu zugleich das passendste

Rechnungsbeispiel. Die einfachste Rechnung giebt die Reihe für arc tang x; jedoch kann man auf mehr als eine Art verfahren.

1) Setzt man tang $x = 1$, so ist $x = \frac{\pi}{4}$ also

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang } 1$$

und dies giebt die Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Diese schon von Leibnitz gegebene Reihe convergirt indessen äußerst langsam.

2) Setzt man tang $x = \frac{1}{2}$ und tang $x' = \frac{1}{3}$, so wird tang $(x + x') = 1$ also

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang } \frac{1}{2} + \text{arc tang } \frac{1}{3}$$

und dies giebt folgende Entwickelung

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \dots$$
$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \dots$$

3) Setzt man tang $x = \frac{1}{2}$, tang $x' = \frac{1}{5}$, tang $x'' = \frac{1}{8}$, so wird gleichfalls tang $(x + x' + x'') = 1$ also

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang } \frac{1}{2} + \text{arc tang } \frac{1}{5} + \text{arc tang } \frac{1}{8}$$

und dies giebt die Entwickelung

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \dots$$
$$+ \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \dots$$
$$+ \frac{1}{8} - \frac{1}{3.8^3} + \frac{1}{5.8^5} - \frac{1}{7.8^7} + \dots$$

Nach dieser Formel hat der Kopfrechner Dase die Zahl π auf 200 Decimalstellen berechnet (siehe Crelle's Journal für Mathematik, 27. Band).

4) Setzt man $\tan x = \frac{1}{5}$, so wird $\tan 2x = \frac{5}{12}$, $\tan 4x = \frac{120}{119}$ und man muß $\tan x' = \frac{1}{239}$ setzen, damit $\tan(4x - x') = 1$ wird. Man hat also

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{239}$$

und dies giebt die Entwickelung

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right)$$

oder für die numerische Rechnung bequemer

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}8\left(1 - \frac{0{,}04}{3} + \frac{0{,}04^2}{5} - \frac{0{,}04^3}{7} + \ldots\right) - \frac{1}{239}\left(1 - \frac{1}{3.57121} + \frac{1}{5.57121^2} - \ldots\right).$$

Die Rechnung nach dieser letzten Formel wird auf 9 Decimalstellen folgende:

$$1 = 1 \qquad\qquad -\frac{0{,}04}{3} = -0{,}013\,333\,333$$

$$\frac{0{,}04^2}{5} = 0{,}000\,32 \qquad\qquad -\frac{0{,}04^3}{7} = -0{,}000\,009\,143$$

$$\frac{0{,}04^4}{9} = 0{,}000\,000\,284 \qquad\qquad -\frac{0{,}04^5}{11} = -0{,}000\,000\,009$$

$$1{,}000\,320\,284 \qquad\qquad -0{,}013\,342\,485$$

$$0{,}986\,977\,799$$
$$\cdot\, 0{,}8$$
$$0{,}789\,582\,239$$

$$1 - \frac{1}{3.57121} = 1 - 0{,}000\,005\,836$$
$$= 0{,}999\,994\,164$$
$$\cdot -\frac{1}{239}$$
$$-0{,}004\,184\,076$$

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}789\,582\,239 \quad - \quad 0{,}004\,184\,076$$
$$= 0{,}785\,396\,163$$
$$\pi = 3{,}141\,592\,652.$$

Dieses Resultat ist nur in seiner letzten Stelle unrichtig, was eine Folge von dem vernachlässigten Einflusse der späteren Decimalstellen ist.

Elfter Abschnitt.

Auflösung der höheren Gleichungen.

---

§. 164.

Erklärung. Unter einer **höheren Gleichung mit Einer Unbekannten** versteht man eine Gleichung, welche entsteht, indem ein nach Potenzen der Unbekannten, als Hauptzahl, geordneter Ausdruck gleich Null gesetzt wird.

Der größte Exponent der Unbekannten bestimmt den **Grad** der Gleichung.

Allgemein hat eine höhere Gleichung vom $n$ten Grade die Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0$$

wo x die Unbekannte bezeichnet und die Coefficienten a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n beliebige gegebene Werthe haben können. Die höchste Potenz x^n kann immer frei von einem Coefficienten vorausgesetzt werden, weil, wenn ein solcher vorhanden sein sollte, man sogleich die ganze Gleichung durch denselben dividiren kann. Negative Exponenten bleiben ausgeschlossen.

Wenn man den Ausdruck, welcher gleich Null gesetzt wird, mit u bezeichnet, so kann man die vorstehende Gleichung abgekürzt schreiben

$$u = 0$$

worin

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n.$$

Anmerkung. Nicht selten wird eine höhere Gleichung in einer unentwickelten Form vorgelegt und muß erst durch Umordnung auf die oben bezeichnete Gestalt gebracht werden, was durch bekannte Methoden geschieht.

§. 165.

Erklärung. Unter Auflösung einer höheren Gleichung versteht man die Aufsuchung derjenigen Werthe, welche, an die Stelle der Unbekannten in dieser Gleichung gesetzt, der Gleichung Genüge leisten.

Diese Werthe werden die Wurzeln der Gleichung genannt.

Um die hier bezeichnete Aufgabe in der erforderlichen Allgemeinheit aufzufassen, muß man sich denken, daß der Ausdruck u (s. den vorigen Paragraphen) zuerst an und für sich betrachtet werde, d. h. ohne die Bedingung, daß er gleich Null sein soll. Alsdann erscheint in diesem Ausdrucke die Unbekannte x wie Hauptzahl, welche beliebiger Werthe fähig ist und welche man demnach, um alle Möglichkeiten zu erschöpfen, die Gesammtheit aller Werthe von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ muß durchlaufen lassen, um gleichzeitig die entsprechenden Werthe von u zu betrachten. Man gelangt damit zu einer Auffassung, welche derjenigen ähnlich ist, der dieser Ausdruck u als allgemeines Glied einer Progression bereits in den §§. 101 u. folg. unterworfen wurde, nur mit dem Zusatze, daß man hier x um Stufen von beliebiger Kleinheit sich muß ändern lassen, damit auch u um hinreichend kleine Stufen sich ändere. Jedesmal, wenn man bei diesen successiven Aenderungen zu einem Werthe von x gelangt, der $u = 0$ macht, hat man eine Wurzel der gegebenen Gleichung erhalten, während alle anderen Werthe von x, die nicht $u = 0$ machen, für den vorliegenden Zweck nicht weiter in Betracht kommen.

Es zeigt sich übrigens sogleich, daß diese Betrachtung, um erschöpfend zu sein, sogleich von vorn herein auf das Gebiet der complexen Zahlen ausgedehnt werden muß. Denn selbst wenn alle

Coefficienten der gegebenen Gleichung reell sind, so ist schon aus der Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades (die den einfachsten Fall der höheren Gleichungen bilden) bekannt, daß es Gleichungen giebt, denen nicht durch reelle Werthe der Unbekannten Genüge geschehen kann. So z. B. die Gleichung $x^2 + 16 = 0$ hat gar keine reelle Wurzel, sondern nur die beiden imaginären Wurzeln $+ 4i$ und $- 4i$. Von diesen Wurzeln würde man, beim Ausschlusse der complexen Zahlen aus der Betrachtung, nicht einmal eine Andeutung ihrer Existenz erhalten.

Allgemeine Eigenschaften der höheren Gleichungen.

§. 166.

Lehrsatz. Der Werth des Ausdrucks

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

fällt für unendlich wachsende Werthe von x immer näher mit dem Werthe seines ersten Gliedes, d. h. mit

$$u = x^n$$

zusammen.

Beweis. Aus der gegebenen Gleichung hat man

$$\frac{u}{x^n} = 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$$

und daraus folgt für unendlich wachsende Werthe von x (wo das Wachsen sich auf den Zahlwerth von x, wenn diese Zahl reell ist, oder auf den Modulus von x, wenn diese Zahl complex ist, zu beziehen hat)

$$\lim \left(\frac{u}{x^n}\right) = 1. \qquad (1)$$

Vermöge dieser Gleichung kann man aber für hinreichend große Werthe von x auch schreiben

$$\frac{u}{x^n} = 1 + \varepsilon$$

wo ε eine kleine Zahl bedeutet, die mit $x = \infty$ verschwindet; und daraus hat man

$$u = x^n (1 + \varepsilon) \qquad (2)$$

d. h. für große Werthe von x bedarf der Werth von x^n nur noch der Multiplication mit der von der Einheit wenig verschiedenen Zahl $1+\varepsilon$, um in den wahren Werth von u überzugehen.

§. 167.

Lehrsatz. Es giebt jederzeit einen compleren Werth, welcher, in einer gegebenen höheren Gleichung mit Einer Unbekannten an die Stelle der Unbekannten gesetzt, dieser Gleichung Genüge leistet.

Beweis. Es sei, wie bisher, der Ausdruck gegeben

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n. \quad (1)$$

Substituirt man darin für x die complexe Zahl

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (2)$$

so erhält man

$$u = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + a_1 r^{n-1}(\cos\overline{n-1}.\varphi + i\sin\overline{n-1}.\varphi)$$
$$+ a_2 r^{n-2}(\cos\overline{n-2}.\varphi + i\sin\overline{n-2}.\varphi) + \ldots + a_n \quad (3)$$

und es kommt darauf an, zu beweisen, daß es jederzeit möglich ist, hierin r und φ so zu wählen, daß man erhält

$$u = 0. \quad (4)$$

Zu dem Ende betrachte man zuerst ein willkürlich angenommenes Paar von Werthen für r und φ. Die Einsetzung dieser Werthe in (3) liefert einen bestimmten Werth von u, der, wenn man ihn in der Zahlen-Ebene zur Anschauung bringt, durch einen bestimmten Punkt C dieser Ebene, Fig. 10, repräsentirt wird. Läßt man darauf φ sich ändern, während einstweilen r noch unverändert bleibt, so wird auch der Werth von u successive ein anderer werden und die Reihefolge der diesen Werthen entsprechenden Punkte der Zahlen-Ebene wird eine krumme Linie darstellen, welche, nachdem φ um 2π sich geändert hat und mithin der anfängliche Werth von u wieder zum Vorschein gekommen ist, wieder in den Punkt C zurückkehrt und damit sich in sich selbst abschließt. Wenn man endlich auch r sich ändern läßt, so wird jedem anderen Werthe von r eine andere krumme Linie C', C'', 2c. der so eben beschriebenen

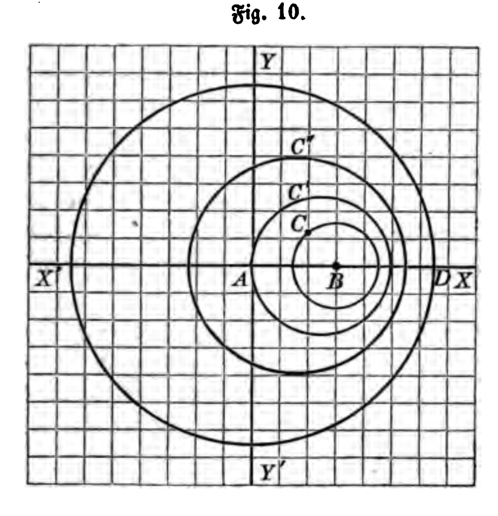


Fig. 10.

Art zugehören*), und es entsteht die Frage, ob unter allen diesen krummen Linien auch mindestens eine (wie hier C') vorkommt, welche durch den Nullpunkt A der Ebene geht und mithin den Werth $u = 0$ in sich enthält. Diese Frage wird sich entscheiden, sobald man die beiden äußersten Fälle, nämlich für sehr kleine und für sehr große Werthe von r, ins Auge faßt.

1) Für $r = 0$ reducirt sich die Gleichung (3) auf

$$u = a_n$$

mithin degenerirt in diesem Falle die in Rede stehende krumme Linie zu einem Punkte der Zahlen-Ebene, welcher B sei. Daraus folgt, daß für sehr kleine Werthe von r die diesen Werthen zugehörigen krummen Linien ihrer ganzen Erstreckung nach sich in der Nähe dieses Punkts B halten werden.

2) Für unendlich wachsende Werthe von r erhält man aus der Gleichung (3), vermöge des vorigen Lehrsatzes,

$$u = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

und dieser Ausdruck liefert, indem man φ von einem bestimmten Werthe ausgehend um den Betrag 2π wachsen läßt, als zugehörige krumme Linie einen aus dem Nullpunkte A der Zahlen-Ebene, als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser $AD = r^n$ beschriebenen Kreis. Daraus folgt, daß für sehr große Werthe von r die entsprechenden

*) In Fig. 10 sind diese krummen Linien der Einfachheit wegen als Kreise angegeben, was nicht richtig ist. Doch wird die Figur ihren Zweck, den Text zu erläutern, schon erfüllen, ohne daß sie nöthig hat, die wahre Natur dieser krummen Linien zur Anschauung zu bringen.

krummen Linien einem aus dem Nullpunkte A der Zahlen-Ebene, als Mittelpunkt, beschriebenen Kreise nahe kommen.

Da hiernach für sehr kleine Werthe von r die diesen Werthen zugehörigen krummen Linien den Nullpunkt A der Ebene außer sich lassen, dagegen für sehr große Werthe von r die zugehörigen krummen Linien den Nullpunkt A der Ebene in sich einschließen, so muß es von den Curven der ersten Art zu den Curven der zweiten Art nothwendig mindestens eine Uebergangs-Curve geben, welche durch den Nullpunkt A selbst geht und mithin den Werth $u = 0$ in sich enthält.

Man erkennt leicht, daß dieser Beweis unabhängig von der Beschaffenheit der Coefficienten a_1, a_2, ꝛc. ist, die demnach beliebige reelle oder complexe Zahlen sein dürfen. Nur der Fall $a_n = 0$ mußte ausgeschlossen bleiben, in welchem Falle übrigens die Richtigkeit des Satzes auf der Hand liegt.

Anmerkung. Dieser Fundamentalsatz in der Theorie der höheren Gleichungen wurde zum ersten Male durch Gauß im Jahre 1799 (damals 22 Jahr alt) bewiesen. Seitdem sind verschiedene andere und zum Theil einfachere Beweise nachgefolgt. Den vorstehenden Beweis hat der Verf. zuerst gegeben in Grunert's Archiv der Mathematik, 11. Theil, 1848.

§. 168.

Lehrsatz. Wenn α eine Wurzel der Gleichung $u = 0$ ist, so ist der Ausdruck u durch $x - \alpha$ ohne Rest theilbar.

Beweis. Setzt man in dem Ausdrucke

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

den Werth α an die Stelle von x, so muß nach der Voraussetzung u in 0 übergehen, oder man erhält

$$0 = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Die Subtraction dieser beiden Gleichungen giebt

$$u = x^n - \alpha^n + a_1 (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + a_2 (x^{n-2} - \alpha^{n-2}) + \ldots$$

und da die Differenzen $x^n - \alpha^n$, $x^{n-1} - \alpha^{n-1}$, $x^{n-2} - \alpha^{n-2}$, ꝛc. sämmtlich durch $x - \alpha$ ohne Rest theilbar sind, so muß also auch u durch $x - \alpha$ ohne Rest theilbar sein.

Beispiel. Der Ausdruck

$$u = x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 12x + 36$$

wird zu Null, wenn man darin $x = 2$ substituirt, oder es ist 2 eine Wurzel der Gleichung $u = 0$. Deshalb muß dieser Ausdruck durch $x - 2$ theilbar sein und man erhält

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 12x + 36}{x - 2} = x^3 + 4x^2 - 15x - 18.$$

Man kann sogleich bemerken, daß wenn man den hier erhaltenen Quotienten gleich Null setzt, alle Wurzeln dieser neuen Gleichung gleichfalls Wurzeln der gegebenen Gleichung $u = 0$ sein werden. Dies wird in dem folgenden Lehrsatze weiter ausgeführt.

§. 169.

Lehrsatz. Der Ausdruck des $n$ten Grades

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

kann jederzeit in n Factoren des ersten Grades zerlegt, d. h. auf die Form gebracht werden

$$u = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots .$$

Beweis. Für die Gleichung $u = 0$ giebt es nach §. 167 jederzeit einen Werth, welcher an die Stelle von x gesetzt dieser Gleichung Genüge leistet. Ist α ein solcher Werth, so muß nach dem vorigen Paragraphen u durch $x - \alpha$ theilbar sein und man wird haben

$$u = (x - \alpha) u' \qquad (1)$$

wo u' den Quotienten der Division u durch $x - \alpha$ bezeichnet, also ein Ausdruck des $(n-1)$ten Grades ist.

Für die Gleichung $u' = 0$ giebt es nach §. 167 gleichfalls einen Werth, welcher an die Stelle von x gesetzt dieser Gleichung Genüge leistet. Ist β ein solcher Werth, so muß nach dem vorigen Paragraphen wieder u' durch $x - \beta$ theilbar sein und man wird haben

$$u' = (x - \beta) u'' \qquad (2)$$

wo u'' den Quotienten der Division u' durch $x - \beta$ bedeutet und ein Ausdruck des $(n - 2)$ten Grades ist.

Ebenso kann man fortfahren zu setzen, indem man eine Wurzel der Gleichung $u'' = 0$ mit γ bezeichnet,

$$u'' = (x - \gamma)\, u''' \qquad (3)$$

wo u''' vom $(n-3)$ten Grade sein wird, u. s. w.

Aus den Gleichungen (1), (2), (3) zc. folgt der zu beweisende Satz.

Beispiel. Der Ausdruck

$$u = x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 12x + 36$$

wird zu Null, wenn man $x = 2$ substituirt. Also kann man setzen $u = (x - 2)\, u'$. Der Ausdruck

$$u' = x^3 + 4x^2 - 15x - 18$$

wird zu Null, wenn man $x = 3$ substituirt. Also kann man setzen $u' = (x - 3)\, u''$. Der Ausdruck

$$u'' = x^2 + 7x + 6$$

wird zu Null, wenn man $x = -1$ annimmt. Also kann man setzen $u'' = (x + 1)\, u'''$. Endlich wird

$$u''' = x + 6.$$

Man hat also

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 12x + 36 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)(x + 6).$$

§. 170.

Lehrsatz. Jede Gleichung des $n$ten Grades

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

hat n Wurzeln.

Beweis. Nach dem vorigen Paragraphen kann der Ausdruck, welcher die linke Seite dieser Gleichung bildet, jederzeit in n Factoren des ersten Grades zerlegt werden, nämlich

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots$$

Soll dieser Ausdruck zu Null werden, so kann solches dadurch, und nur dadurch geschehen, daß irgend einer seiner Factoren des ersten Grades zu Null wird. Man hat mithin

entweder $x - \alpha = 0$, woraus folgt $x = \alpha$
oder $x - \beta = 0$ „ „ $x = \beta$
oder $x - \gamma = 0$ „ „ $x = \gamma$
u. s. w.

welche Aufzählung sämmtliche Wurzeln der gegebenen Gleichung in sich enthält.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß unter diesen Wurzeln auch zwei oder mehrere einander gleich sein können. Man ist allgemein gewohnt, solche gleichen Wurzeln eben so oft als Wurzeln zu zählen, wie der entsprechende Factor des ersten Grades vorhanden ist (wodurch also die Erklärung §. 165 eine geringe Modification erfährt). Die Wurzeln werden sämmtlich einander gleich sein, wenn die Coefficienten a_1, a_2, 2c. identisch mit den Binomial-Coefficienten der $n$ten Potenz sind.

§. 171.

Zusatz. Die Wurzeln der Gleichung $u = 0$ sind jederzeit identisch mit dem Entgegengesetzten der zweiten Theile der Factoren des Products

$$u = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots$$

Dies folgt unmittelbar aus dem vorigen Beweise.

So hat z. B. die Gleichung

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 12x + 36 = 0$$

nach §. 169 die Wurzeln $+2$, $+3$, -1, -6.

Es sind hiernach die Auflösung einer Gleichung des $n$ten Grades und die Zerlegung eines Ausdrucks des $n$ten Grades in seine Factoren des ersten Grades jederzeit identische Aufgaben, oder die Auflösung der einen dieser beiden Aufgaben hat unmittelbar die der anderen zur Folge.

§. 172.

Lehrsatz. In einer Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a = 0$$

deren sämmtliche Coefficienten reell sind, können imaginäre Wurzeln nur paarweise vorkommen, so daß, wenn $p + iq$ eine Wurzel dieser Gleichung ist, auch $p - iq$ eine Wurzel derselben sein wird.

Beweis. Der Ausdruck

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

nimmt, wenn man darin $x = p + iq$ substituirt, nach den Vorschriften des IX. Abschnitts einen Werth an, den man abgekürzt bezeichnen kann durch

$$u = P + iQ.$$

Soll nun $u = 0$ werden, so muß man nach §. 131, 3) einzeln haben

$$P = 0 \quad , \quad Q = 0.$$

Aber in diesem Falle wird auch $P - iQ$ zu Null, und dieser Werth ist nichts anderes als das Resultat der Substitution von $x = p - iq$ in u. Also wird gleichzeitig mit $p + iq$ auch $p - iq$ eine Wurzel der Gleichung $u = 0$ sein.

Als Beispiel kann man die Gleichung

$$x^3 - 3x + 52 = 0$$

betrachten, welche die drei Wurzeln $2 + 3i$, $2 - 3i$ und -4 hat. Oder es ist

$$x^3 - 3x + 52 = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)(x + 4).$$

Man schließt aus diesem Lehrsatze, daß, unter der Voraussetzung reeller Coefficienten, eine Gleichung ungeraden Grades nur eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln enthalten wird, also zum mindesten eine. Eine Gleichung geraden Grades dagegen kann nur eine gerade Anzahl reeller Wurzeln enthalten, möglicher Weise aber gar keine.

Anmerkung. Zwei imaginäre Zahlen wie $p + iq$ und $p - iq$, welche sich nur in den Vorzeichen des rein imaginären Theils unterscheiden, werden auch conjugirte Zahlen genannt und deshalb heißen die obigen Wurzeln conjugirte Wurzeln. Sie haben die Eigenschaft, daß ihr Product immer eine positive reelle Zahl ist, $(p + iq)(p - iq) = p^2 + q^2$.

§. 173.

Zusatz. Der Ausdruck des $n$ten Grades

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

dessen sämmtliche Coefficienten reell sind, kann jederzeit in reelle Factoren des ersten und zweiten Grades zerlegt werden.

Denn wenn unter den n Factoren des ersten Grades, in welche nach §. 169 dieser Ausdruck immer zerlegbar ist, imaginäre Factoren vorkommen, so können diese vermöge des vorigen Paragraphen nur in zusammengehörigen Paaren von der Form

$$(x - p - iq)\,(x - p + iq)$$

vorhanden sein. Das Product eines jeden solchen Paares liefert aber den Ausdruck des zweiten Grades

$$x^2 - 2px + p^2 + q^2$$

welcher reell ist.

So ist z. B. aus dem vorigen Paragraphen

$$x^3 - 3x + 52 = (x^2 - 4x + 13)\,(x + 4).$$

§. 174.

Lehrsatz. Das Product der n Factoren

$$(x - \alpha)\,(x - \beta)\,(x - \gamma)\,(x - \delta)\,\ldots$$

hat den Werth

$$\begin{aligned} x^n &- (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots)\,x^{n-1} \\ &+ (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \ldots)\,x^{n-2} \\ &- (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \ldots)\,x^{n-3} \\ &+ \;\ldots\ldots\; + (-1)^n\,\alpha\beta\gamma\delta\ldots \end{aligned}$$

Beweis. Wenn man das Product durch successive Multiplication entstehen läßt, so kann man ebenso wie im §. 34 sich leicht überzeugen, daß die Einzelproducte, durch deren Summe das vollständige Product dargestellt wird, genau auf dieselbe Weise sich bilden, wie die Variationen mit Wiederholung aus 2 Elementen zur Classe n. Diese Variationen lassen sich aber kürzer herstellen, indem man die Combinationen mit Wiederholung aus denselben

Elementen zu derselben Classe bildet und jede derselben so oft wie möglich permutirt. Es ist dabei nur zu beachten, daß wenn man diese Combinationen aus den Elementen 1 und 2 bildet, unter 1 jederzeit x, unter 2 dagegen successive $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, ꝛc. verstanden werden muß, je nachdem man dieses Element aus einem anderen der gegebenen Factoren entnimmt.

Man erhält also folgende Complexionen:

1 ... (n mal) d. i. x^n

1 ... $(n-1)$ mal und 2 ... (1 mal), und permutirt
d. i. $-x^{n-1}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)$

1 ... $(n-2)$ mal und 2 ... (2 mal), und permutirt
d. i. $+x^{n-2}(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\ldots)$

. . . . . .

2 ... (n mal) d. i. $(-1)^n \alpha\beta\gamma\delta\ldots$

Die Summe aller dieser Glieder liefert den oben gegebenen Ausdruck.

Anmerkung. Dieser Satz ist eine Erweiterung des binomischen Lehrsatzes für absolute ganze Exponenten, §. 34, und geht in diesen selbst über, wenn man $-\alpha=-\beta=-\gamma$ ꝛc. setzt und durch einen einzigen Buchstaben bezeichnet.

§. 175.

Zusatz. Wenn die gegebene Gleichung

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

die Wurzeln α, β, γ, δ ꝛc. hat, so finden zwischen diesen Wurzeln und den Coefficienten der gegebenen Gleichung die Beziehungen statt:

$$a_1=-(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)$$
$$a_2=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_n=(-1)^n\alpha\beta\gamma\delta\ldots$$

Oder in Worten:

Der Coefficient a_1 ist gleich der Summe der Entgegengesetzten aller Wurzeln.

Der Coefficient a_2 ist gleich der Summe aller Producte zu je 2 aus dem Entgegengesetzten der Wurzeln.

Der Coefficient a_3 ist gleich der Summe aller Producte zu je 3 aus dem Entgegengesetzten der Wurzeln. U. s. w., endlich:

Der Coefficient a_n ist gleich dem Producte aus dem Entgegengesetzten aller Wurzeln.

Zur Erläuterung können die obigen Zahlenbeispiele benutzt werden.

Anmerkung. Man kann hiernach auch sagen: Wenn n Unbekannte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c. durch die n Gleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = - a_1$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \ldots = a_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha\beta\gamma\delta \ldots . = (-1)^n a_n$$

bestimmt werden, wo $a_1, a_2 \ldots a_n$ gegebene Zahlen bedeuten, so sind diese Unbekannten identisch mit den n Wurzeln der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

So sind z. B. die beiden Unbekannten α, β, welche den Gleichungen

$$\alpha + \beta = - a_1$$
$$\alpha\beta = a_2$$

genügen sollen, identisch mit den Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0.$$

Ebenso sind die drei Unbekannten α, β, γ, welche den Gleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma = - a_1$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = a_2$$
$$\alpha\beta\gamma = - a_3$$

genügen sollen, identisch mit den Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

U. s. w.

§. 176.

Erklärung. Unter der Transformation einer Gleichung versteht man die Umwandlung der gegebenen Gleichung in eine neue Gleichung, deren sämmtliche Wurzeln zu den

Wurzeln der gegebenen Gleichung in einer gemeinschaftlichen gegebenen Beziehung stehen.

Diese Beziehung unter den Wurzeln kann von sehr verschiedener Art sein. Hier sollen nur die beiden Transformationen betrachtet werden, in denen man hat

$$x = y + h \quad , \quad x = hy \; ,$$

wo y die neue Unbekannte und h eine gegebene Zahl bedeutet. Diese Transformationen bieten verschiedene Erleichterungen für die Auflösung der Gleichungen.

§. 177.

Aufgabe. Eine gegebene Gleichung durch die Substitution $x = y + h$ zu transformiren.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (1)$$

Substituirt man darin $x = y + h$ und ordnet das Resultat nach der neuen Unbekannten y, so erhält man

$$\begin{aligned}
x^n &= y^n + nhy^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 y^{n-2} \\
&\qquad + \ldots nh^{n-1} y + h^n \\
a_1 x^{n-1} &= \qquad a_1 y^{n-1} + (n-1) a_1 h y^{n-2} \\
&\qquad + \ldots (n-1) a_1 h^{n-2} y + a_1 h^{n-1} \\
a_2 x^{n-2} &= \qquad\qquad a_2 y^{n-2} \\
&\qquad + \ldots (n-2) a_2 h^{n-3} y + a_2 h^{n-2} \\
\ldots & \qquad\qquad\qquad \ldots \\
a_{n-1} x &= \qquad\qquad\qquad a_{n-1} y + a_{n-1} h \\
a_n &= \qquad\qquad\qquad a_n
\end{aligned}$$

Diese Summe kann man abgekürzt schreiben

$$y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \ldots b_{n-1} y + b_n = 0 \quad (2)$$

indem man setzt

$$\begin{aligned}
b_1 &= nh + a_1 \\
b_2 &= \frac{n(n-1)}{2} h^2 + (n-1) a_1 h + a_2 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$b_{n-1} = nh^{n-1} + (n-1)a_1h^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$
$$b_n \;\;= h^n + a_1h^{n-1} + a_2h^{n-2} + \ldots a_{n-1}h + a_n.$$

Beispiel. Die Gleichung

$$x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = 0$$

geht durch die Substitution $x = y - 2$ über in die transformirte Gleichung

$$y^3 - 16y = 0$$

welche die Wurzeln 4, 0, — 4 hat. Also hat die gegebene Gleichung die Wurzeln 2, — 2, — 6.

§. 178.

Zusatz. Soll die gegebene Gleichung durch Transformation ihr zweites Glied verlieren, so muß man setzen

$$x = y - \frac{a_1}{n}.$$

Dies folgt aus dem vorigen Paragraphen, wenn man daselbst $b_1 = 0$ setzt.

Beispiel s. den vorigen Paragraphen.

§. 179.

Aufgabe. Eine gegebene Gleichung durch die Substitution $x = hy$ zu transformiren.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sei

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_{n-1}x + a_n = 0. \qquad (1)$$

Setzt man darin $x = hy$, so folgt

$$h^ny^n + a_1h^{n-1}y^{n-1} + a_2h^{n-2}y^{n-2} + \ldots a_{n-1}hy + a_n = 0$$

und wenn man durch h^n dividirt

$$y^n + \frac{a_1}{h}y^{n-1} + \frac{a_2}{h^2}y^{n-2} + \ldots \frac{a_{n-1}}{h^{n-1}}y + \frac{a_n}{h^n} = 0. \qquad (2)$$

Von dieser Transformation kann zuweilen Gebrauch gemacht werden, um aus einer gegebenen Gleichung eine andere herzuleiten, welche kleinere Coefficienten besitzt; insbesondere also in dem Falle, wo die Coefficienten a_1, a_2, 2c. ganze Zahlen sind und man eine

Zahl h von der Beschaffenheit anzugeben vermag, daß auch $\frac{a_1}{h}$, $\frac{a_2}{h^2}$ rc. ganze Zahlen werden.

Beispiel. Die Gleichung

$$x^3 + 18x^2 + 72x - 7280 = 0$$

geht durch die Substitution $x = 2y$ über in die transformirte Gleichung

$$y^3 + 9y^2 + 18y - 910 = 0.$$

Diese hat die einzige reelle Wurzel 7, also die gegebene Gleichung die einzige reelle Wurzel 14.

§. 180.

Zusatz. Die vorige Substitution verwandelt sich in $x = \frac{y}{h}$, wenn man $\frac{1}{h}$ statt h setzt.

Also verwandelt sich die gegebene Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

durch die Substitution $x = \frac{y}{h}$ in die transformirte Gleichung

$$y^n + a_1 h y^{n-1} + a_2 h^2 y^{n-2} + \ldots a_{n-1} h^{n-1} y + a_n h^n = 0. \quad (2)$$

Von dieser Transformation kann Gebrauch gemacht werden, um eine gegebene Gleichung, welche Brüche zu Coefficienten hat, in eine solche zu verwandeln, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Denn man ist, wenn a_1, a_2, rc. Brüche sind, immer im Stande, die Zahl h so zu wählen, daß die Producte $a_1 h$, $a_2 h^2$, rc. ganze Zahlen werden.

Beispiel 1. Die Gleichung

$$x^3 + \frac{25}{2}x^2 + \frac{769}{16}x - \frac{225}{4} = 0$$

geht durch die Substitution $x = \frac{y}{4}$ über in die transformirte Gleichung mit ganzen Coefficienten

$$y^3 + 50y^2 + 769y - 3600 = 0$$

welche die Wurzeln 9, 16, 25 hat. Also hat die gegebene Gleichung die Wurzeln $\frac{9}{4}$, 4, $\frac{25}{4}$.

Beispiel 2. Die Gleichung

$$x^3 - 5{,}75\,x^2 + 6{,}785\,x - 9{,}7428 = 0$$

geht durch die Substitution $x = \frac{y}{100}$ über in die transformirte Gleichung

$$x^3 - 575\,x^2 + 67850\,x - 9742800 = 0$$

welche gleichfalls nur ganze Coefficienten enthält.

Auflösung der cubischen Gleichungen.

§. 181.

Aufgabe. Eine gegebene cubische Gleichung aufzulösen.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sei bereits von ihrem zweiten Gliede befreit, was nach §. 178 immer möglich ist, und habe also die Gestalt

$$x^3 + ax + b = 0. \qquad (1)$$

Man suche vorläufig eine Wurzel dieser Gleichung und nehme an, diese Wurzel sei eine zweitheilige Zahl

$$x = p + q. \qquad (2)$$

Dann wird

$$\begin{aligned} x^3 &= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 \\ &= 3pq\,(p+q) + p^3 + q^3 \end{aligned}$$

und wenn man hierin für $p + q$ seinen Werth aus (2) setzt

$$x^3 = 3pqx + p^3 + q^3$$

oder

$$x^3 - 3pqx - (p^3 + q^3) = 0 \qquad (3)$$

welche Gleichung demnach, vermöge ihrer Entstehung, die Wurzel $x = p + q$ besitzt.

Soll nun die Gleichung (1) mit (3) identisch sein, so muß man haben

$$\left.\begin{aligned} -(p^3 + q^3) &= b \\ -3pq &= a \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

also auch

$$\left.\begin{aligned} p^3 + q^3 &= -b \\ p^3q^3 &= -\left(\frac{a}{3}\right)^3 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Mithin können, nach §. 175 Anmerk., die Werthe p^3 und q^3 wie die Wurzeln einer quadratischen Hülfsgleichung

$$z^2 + bz - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0 \qquad (6)$$

angesehen werden, wo z eine neue Unbekannte bezeichnet. Die Auflösung dieser quadratischen Hülfsgleichung giebt

$$z = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \qquad (7)$$

und wenn man den einen in diesem Ausdrucke enthaltenen Werth als identisch mit p^3 und den anderen als identisch mit q^3 nimmt, so wird

$$\left.\begin{aligned} p &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \\ q &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Folglich erhält man endlich

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \qquad (9)$$

als Ausdruck für die gesuchte Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung.

Beispiel. Ist die Gleichung gegeben

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

so erhält man nach der Formel (9), indem man darin $a = -6$ und $b = -9$ einsetzt, unmittelbar

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$
$$= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$$

welches eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist.

Anmerkung. Der hier entwickelte Ausdruck (9), welcher die allgemeine Auflösung aller cubischen Gleichungen liefert, ist unter dem Namen der Cardanischen Formel bekannt, nach dem ita-

lienischen Mathematiker Cardano, welcher sie in seiner Algebra 1545 zuerst bekannt machte. Der Erfinder dieser Formel war jedoch nicht Cardano, sondern, wie dieser selbst erzählt, der Mathematiker Scipio Ferreo zu Bologna, der sie seinen Schülern mittheilte und von welchen letzteren sie an Cardano gelangte.

§. 182.

Zusatz. Die Cardanische Formel enthält sogleich alle drei Wurzeln der gegebenen Gleichung in sich, wenn man die Mehrdeutigkeit der Cubikwurzeln aus complexen Zahlen beachtet.

Denn nach §. 143 hat jede Cubikwurzel aus einer complexen Zahl drei Werthe, und man kann (s. daselbst Anmerk. 1), wenn einer derselben bekannt ist, die beiden anderen finden, indem man jenen mit ω und ω^2 multiplicirt, wo unter ω der Werth zu verstehen ist

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}.$$

Nun sei p einer der drei Werthe von

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Dann sind die beiden anderen Werthe dieser Cubikwurzel $p\omega$ und $p\omega^2$

Ebenso sei q einer der drei Werthe von

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Dann sind die beiden anderen Werthe dieser Cubikwurzel $q\omega$ und $q\omega^2$.

Man muß also, um irgend einen Werth von x zu finden, zu irgend einem der drei Werthe p, $p\omega$, $p\omega^2$ irgend einen der drei Werthe q, $q\omega$, $q\omega^2$ addiren. Aber man darf nicht beliebige dieser Werthe addiren. Denn nach (4) des vorigen Paragraphen sind diese Werthe überdies an die Bedingung gebunden

$$pq = -\frac{a}{3}$$

und man darf mithin nur solche Werthe in eine Summe vereinige

deren Product identisch dasselbe ist. Sind also p und q irgend zwei dieser Werthe, welche der so eben angezeigten Bedingungsgleichung Genüge leisten, so darf man nur folgende Summen bilden

$$1)\quad x = p + q$$
$$2)\quad x = p\omega + q\omega^2$$
$$3)\quad x = p\omega^2 + q\omega$$

weil $pq = p\omega . q\omega^2 = p\omega^2 . q\omega$ ist, wegen $\omega^3 = 1$.

Setzt man in den beiden letzten Ausdrücken von x für ω seinen obigen Werth, so erhält man folgende Ausdrücke für die zweite und die dritte Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung

$$2)\quad x = p\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}\right) + q\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{3}\right)$$
$$= -\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} i \sqrt{3}$$

$$3)\quad x = p\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{3}\right) + q\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}\right)$$
$$= -\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2} i \sqrt{3}.$$

Beispiel. Die Gleichung des vorigen Paragraphen

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

giebt $p = 2$, $q = 1$, also werden die drei Wurzeln derselben sein

$$1)\quad x = 3$$
$$2)\quad x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}$$
$$3)\quad x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{3}.$$

Anmerkung. Die obigen Ausdrücke für die zweite und die dritte Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung kann man auch nach §. 168 finden. Denn da $x = p + q$ im vorigen Paragraphen eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 3pqx - (p^3 + q^3) = 0$$

ist, so muß $x^3 - 3pqx - (p^3 + q^3)$ durch $x - (p + q)$ ohne Rest theilbar sein. Setzt man den Quotienten dieser Division gleich Null, so hat man die quadratische Gleichung

$$x^2 + (p + q)x + p^2 - pq + q^2 = 0$$

deren Auflösung die beiden anderen Wurzeln liefert.

§. 183.

Aufgabe. Aus einer gegebenen cubischen Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

unter der Voraussetzung, daß die Coefficienten a und b derselben reell sind, die Natur der Wurzeln dieser Gleichung zu erkennen.

Auflösung. Da die Wurzeln dieser Gleichung durch den Ausdruck

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

gegeben werden, dessen beiden Theile oben mit p und q bezeichnet worden sind, so kommt es, um die Natur dieser Wurzeln zu erkennen, hauptsächlich auf die Beschaffenheit der Summe an

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

und man hat demgemäß drei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Es sei

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0.$$

Dieser Fall tritt nicht nur ein, wenn a positiv ist, sondern auch wenn a negativ und zugleich der Zahlwerth von $\left(\frac{a}{3}\right)^3$ kleiner als derjenige von $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ist.

In diesem Falle ist x immer gleich der Summe zweier Cubikwurzeln aus reellen Zahlen. Versteht man nun unter p und q die reellen Werthe dieser Cubikwurzeln, so wird die erste Wurzel der gegebenen Gleichung oder

$$x = p + q$$

reell, und die beiden anderen Wurzeln, welche man in den Ausdruck zusammenfassen kann

$$x = -\frac{p+q}{2} \pm \frac{p-q}{2}\, i\sqrt{3}$$

werden imaginär; d. h. die gegebene Gleichung hat in diesem Falle immer eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Nebenher kann man bemerken, daß das Vorzeichen der einen reellen Wurzel immer das entgegengesetzte des Coefficienten b sein wird.

Zweiter Fall. Es sei

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn a negativ und der Zahlwerth von $\left(\frac{a}{3}\right)^3$ gleich demjenigen von $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ist.

In diesem Falle ist x gleich der Summe zweier Cubikwurzeln aus reellen Zahlen, mit dem besonderen Zusatze, daß diese Zahlen gleich groß sind, nämlich jede $= -\frac{b}{2}$. Versteht man also unter p und q die reellen Werthe dieser Cubikwurzeln, so hat man $p = q$; die erste Wurzel der gegebenen Gleichung wird

$$x = 2p$$

und jede der beiden andern Wurzeln wird

$$x = -p$$

d. h. die gegebene Gleichung hat in diesem Falle drei reelle Wurzeln, unter denen zwei einander gleich sind.

Dritter Fall. Es sei

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn a negativ und der Zahlwerth von $\left(\frac{a}{3}\right)^3$ größer als derjenige von $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ist.

In diesem Falle ist x gleich der Summe zweier Cubikwurzeln aus conjugirten imaginären Zahlen. Ohne in die Ausziehung dieser Cubikwurzeln selbst einzugehen, kann man schon aus §. 143 schließen, daß die Cubikwurzeln aus conjugirten Zahlen gleichfalls wieder conjugirte Zahlen sein werden. Wenn demnach p von der Form $p = \alpha + i\beta$ ist, so muß $q = \alpha - i\beta$ sein; die erste Wurzel der gegebenen Gleichung wird also

$$x = 2\alpha$$

und die beiden anderen Wurzeln werden

$$x = -\alpha \mp \beta \sqrt{3}$$

d. h. die gegebene Gleichung hat in diesem Falle drei ungleiche reelle Wurzeln.

Beispiele.

$$1)\ x^3 - 6x - 9 = 0$$

hat die drei Wurzeln $3,\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3},\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{3}$ (siehe den vorigen Paragraphen).

$$2)\ x^3 - 12x - 16 = 0$$

hat die drei Wurzeln $4, -2, -2$.

$$3)\ x^3 - 6x - 4 = 0$$

hat die drei Wurzeln $-2,\ 1 + \sqrt{3} = 2{,}732..,\ 1 - \sqrt{3} = -0{,}732..$ (siehe die Rechnung im folgenden Paragraphen).

Anmerkung. Der dritte hier erläuterte Fall hat die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, daß die Rechnung den Durchgang durch eine Cubikwurzel-Ausziehung aus imaginären Zahlen nehmen muß, um dennoch schließlich bei drei reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung anzulangen. Den Mathematikern zur Zeit des Cardano entging diese Eigenthümlichkeit nicht, sie besaßen aber nicht die Mittel, um die gedachte Cubikwurzel durch eine directe Rechnung zu finden, weil ihnen die trigonometrische Form der compleren Zahlen und damit die Hülfsmittel des §. 143 fehlten, und sie nannten deshalb diesen Fall den Casus irreducibilis, welche Benennung sich bis heute erhalten hat.

Der folgende Paragraph giebt eine vollständige Zusammenstellung der in dem Obigen bereits begründeten Rechnung, welche nöthig ist, um den Casus irreducibilis unter Zuziehung der trigonometrischen Form der compleren Zahlen aufzulösen.

§. 184.

Aufgabe. Eine gegebene cubische Gleichung mit reellen Coefficienten, welche drei ungleiche reelle Wurzeln besitzt, durch Einführung der trigonometrischen Form der compleren Zahlen aufzulösen.

Auflösung. Um die eintretenden Fälle deutlicher unterscheiden zu können, sollen hier unter den Buchstaben a und b nur die Zahlwerthe der Coefficienten verstanden werden, denen also die Vorzeichen noch ausdrücklich vorgesetzt werden müssen. Man hat alsdann die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden

$$x^3 - ax - b = 0$$

$$x^3 - ax + b = 0$$

wo unter den Coefficienten die Bedingung stattfindet

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

1) Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 - ax - b = 0.$$

Die Cardanische Formel liefert

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + i\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - i\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}} + i\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^3}}} + \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}} - i\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^3}}}$$

und wenn man einen Winkel φ einführt, so daß man hat

$$\cos\varphi^2 = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

also

$$\cos\varphi = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}} \qquad (1)$$

so folgt

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}}\, \sqrt[3]{\cos\varphi + i\sin\varphi} + \sqrt{\frac{a}{3}}\, \sqrt[3]{\cos\varphi - i\sin\varphi}.$$

Die Ausziehung der Cubikwurzeln giebt nach §. 143

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}}.\left(\cos\frac{\varphi + 2h\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2h\pi}{3}\right)$$
$$+ \sqrt{\frac{a}{3}}.\left(\cos\frac{\varphi + 2h\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2h\pi}{3}\right)$$

d. i.

$$x = 2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cos\frac{\varphi + 2h\pi}{3}$$

welcher Ausdruck die drei gesuchten Wurzeln liefert, wenn man für h successiv die Werthe 0, 1, 2 einsetzt.

Man hat also für $h = 0$ die erste Wurzel

$$x = 2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cos\frac{\varphi}{3} \qquad (2)$$

und für $h = 1$ und $h = 2$ die beiden anderen Wurzeln

$$x = 2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} = -2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cos\frac{\pi - \varphi}{3}$$
$$x = 2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} = -2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cos\frac{\pi + \varphi}{3}$$

welche man zusammenfassen kann in den Ausdruck

$$x = -2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cos\frac{\pi \mp \varphi}{3}. \qquad (3)$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) enthalten demnach die vollständige Auflösung.

2) Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 - ax + b = 0.$$

Für diesen Fall kann man sogleich aus §. 175 schließen, daß die drei Wurzeln das Entgegengesetzte der vorhergehenden sein müssen. Man hat also, während der Winkel φ wieder aus (1) sich bestimmt, folgende Ausdrücke für die drei Wurzeln

$$x = -2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cos\frac{\varphi}{3} \qquad (4)$$

und $$x = 2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cos\frac{\pi \mp \varphi}{3}. \qquad (5)$$

Beispiel 1. Um die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 6x - 4 = 0$$

zu finden, hat man nach den Gleichungen (1), (2) und (3) zu rechnen. Man setzt also

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

d. i. $\varphi = 45^\circ$ und erhält sodann

$$x = 2\sqrt{2}.\ \cos 15^\circ = 1 + \sqrt{3} = 2{,}732..$$
$$x = -2\sqrt{2}.\ \cos 45^\circ = -2$$
$$x = -2\sqrt{2}.\ \cos 75^\circ = 1 - \sqrt{3} = -0{,}732..$$

Beispiel 2. Um die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 18x + 12 = 0$$

zu finden, hat man nach den Gleichungen (1), (4) und (5) zu rechnen. Man setzt

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{6}}$$
$$\log\cos\varphi = 9{,}61092$$

also $\varphi = 65^\circ\ 54'\ 19''$ und erhält sodann

$$x = -2\sqrt{6}.\ \cos 21^\circ\ 58'\ 6'' = -4{,}5433$$
$$x = 2\sqrt{6}.\ \cos 38^\circ\ 1'\ 54'' = 3{,}8588$$
$$x = 2\sqrt{6}.\ \cos 81^\circ\ 58'\ 6'' = 0{,}6845.$$

Es ist zweckmäßig und für die tiefere Einsicht in die Sache förderlich, wenn man die Zahlenbeispiele mit den entsprechenden Constructionen in der Ebene der complexen Zahlen begleitet. Man vergl. Grunert's Archiv der Mathematik, 7. Theil, S. 402.

§. 185.

Aufgabe. Eine gegebene cubische Gleichung mit reellen Coefficienten, welche nur eine reelle Wurzel besitzt, durch Einführung von Hülfswinkeln aufzulösen.

Oder: Die Cardanische Formel durch Einführung von Hülfswinkeln zur logarithmischen Rechnung bequem zu machen. (Man vergleiche die ähnliche Aufgabe für quadratische Gleichungen, Trigonometrie §. 86).

Auflösung. Um die möglichen Fälle deutlicher zu unterscheiden, sollen (gleichwie im vorigen Paragraphen) unter den Buchstaben a und b wiederum nur die Zahlwerthe der Coefficienten verstanden werden, denen also die Vorzeichen noch ausdrücklich vorgesetzt werden müssen. Man hat also die vier Fälle zu unterscheiden

$$x^3 + ax - b = 0$$
$$x^3 + ax + b = 0$$
$$x^3 - ax - b = 0$$
$$x^3 - ax + b = 0$$

wo in den beiden letzten Fällen die Bedingung stattfinden muß

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 > \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

1) Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 + ax - b = 0.$$

Die Cardanische Formel liefert

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}}}$$

und wenn man einen Hülfswinkel φ einführt, so daß man hat

$$\operatorname{tang}\varphi^2 = \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

d. i.

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{\frac{b}{2}} \tag{1}$$

so folgt

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tang}\varphi^2}\right)} + \sqrt[3]{\frac{b}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \operatorname{tang}\varphi^2}\right)}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{b}{2}\cdot\frac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2}\cdot\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi}}.$$

Zieht man aus (1) den Werth von $\frac{b}{2}$, nämlich

$$\frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}\cot\varphi$$

und setzt diesen in den vorstehenden Ausdruck, so erhält man weiter

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}} - \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}}$$
$$= \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\cot\frac{\varphi}{2}} - \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}.$$

Um noch diesen Ausdruck zu vereinfachen, führe man einen neuen Hülfswinkel ψ ein, so daß man hat

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}. \tag{2}$$

Alsdann wird

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}}\cdot\cot\psi - \sqrt{\frac{a}{3}}\cdot\operatorname{tang}\psi$$

d. i.

$$x = 2\sqrt{\frac{a}{3}}\cdot\cot 2\psi \tag{3}$$

welches die reelle Wurzel ist. Die beiden imaginären Wurzeln werden

$$x = -\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cot 2\psi \pm i\,\frac{\sqrt{a}}{\sin 2\psi}. \qquad (4)$$

2) Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Nach §. 175 werden in diesem Falle die drei Wurzeln das Entgegengesetzte der vorhergehenden. Man hat also, während die Hülfswinkel φ und ψ wie vorhin bleiben, folgende Ausdrücke für die drei Wurzeln

$$x = -2\sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cot 2\psi \qquad (5)$$

$$\text{und } x = \sqrt{\frac{a}{3}}.\ \cot 2\psi \pm i\,\frac{\sqrt{a}}{\sin 2\psi}. \qquad (6)$$

3) Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 - ax - b = 0.$$

Die Cardanische Formel liefert

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}}}$$

und wenn man einen Hülfswinkel φ einführt, so daß man hat

$$\sin \varphi^2 = \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

also

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{\frac{b}{2}} \tag{7}$$

so folgt

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2}(1+\sqrt{1-\sin\varphi^2})} + \sqrt[3]{\frac{b}{2}(1-\sqrt{1-\sin\varphi^2})}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{b}{2}(1+\cos\varphi)} + \sqrt[3]{\frac{b}{2}(1-\cos\varphi)}.$$

Zieht man aus (7) den Werth von $\frac{b}{2}$, nämlich

$$\frac{b}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{\sin\varphi}$$

und setzt diesen in den vorstehenden Ausdruck, so erhält man weiter

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}} + \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}}$$
$$= \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\cot\frac{\varphi}{2}} \quad + \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\mathrm{tang}\frac{\varphi}{2}}.$$

Um noch diesen Ausdruck zu vereinfachen, führe man einen neuen Hülfswinkel ψ ein, so daß man hat

$$\mathrm{tang}\,\psi = \sqrt[3]{\mathrm{tang}\frac{\varphi}{2}}. \tag{8}$$

Alsdann wird

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}}.\cot\psi + \sqrt{\frac{a}{3}}.\,\mathrm{tang}\,\psi$$

d. i.

$$x = \frac{2\sqrt{\frac{a}{3}}}{\sin 2\psi} \tag{9}$$

welches die reelle Wurzel ist. Die beiden imaginären Wurzeln werden

$$x = -\frac{\sqrt{\frac{a}{3}}}{\sin 2\psi} \pm i\sqrt{a}.\,\cot 2\psi. \tag{10}$$

4) Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 - ax + b = 0.$$

Nach §. 175 werden in diesem Falle die drei Wurzeln das Entgegengesetzte der vorhergehenden. Man hat also, während die Hülfswinkel φ und ψ wie vorhin bleiben, folgende Ausdrücke für die drei Wurzeln

$$x = -\frac{2\sqrt{\frac{a}{3}}}{\sin 2\psi} \qquad (11)$$

$$\text{und } x = \frac{\sqrt{\frac{a}{3}}}{\sin 2\psi} \pm i\sqrt{a}\,.\cot 2\psi. \qquad (12)$$

Beispiel. Um die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + 18x + 12 = 0$$

zu finden, hat man nach den Gleichungen (1), (2), (5) und (6) zu rechnen. Man setzt also

$$\text{tang } \varphi = \sqrt{6}$$

$$\log \text{tang } \varphi = 0{,}38908$$

d. i. $\varphi = 67^\circ\ 47'\ 33''$, woraus $\frac{\varphi}{2} = 33^\circ\ 53'\ 47''$, und mithin weiter

$$\log \text{tang } \frac{\varphi}{2} = 9{,}82729$$

$$\log \text{tang } \psi = 9{,}94243$$

d. i. $\psi = 41^\circ\ 12'\ 48'',5$, $2\psi = 82^\circ\ 25'\ 37''$, und endlich

$$x = -\ 0{,}6514$$

$$\text{und } x = 0{,}3257 \pm i\,.\,4{,}2799.$$

Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

§. 186.

Aufgabe. Eine gegebene biquadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sei bereits von ihrem zweiten Gliede befreit, was nach §. 178 immer möglich ist, und habe also die Gestalt

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Man suche vorläufig eine Wurzel dieser Gleichung und nehme an, diese Wurzel sei eine dreitheilige Zahl

$$x = p + q + r. \tag{2}$$

Dann wird, indem man quadrirt

$$x^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2pr + 2qr$$

$$x^2 - (p^2 + q^2 + r^2) = 2(pq + pr + qr)$$

und indem man nochmals quadrirt

$$x^4 - 2(p^2 + q^2 + r^2)x^2 + (p^2 + q^2 + r^2)^2$$
$$= 4(p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2) + 8(p^2qr + pq^2r + pqr^2)$$

und wenn man hierin $p^2qr + pq^2r + pqr^2 = pqr(p + q + r) = pqr\,x$ setzt und darauf ordnet, so folgt

$$x^4 - 2(p^2 + q^2 + r^2)x^2 - 8pqrx + (p^2 + q^2 + r^2)^2$$
$$- 4(p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2) = 0 \tag{3}$$

welche Gleichung demnach, vermöge ihrer Entstehung, die Wurzel $x = p + q + r$ besitzt.

Soll nun die Gleichung (1) mit (3) identisch sein, so muß man haben

$$\left.\begin{aligned} &-2(p^2 + q^2 + r^2) = a \\ &-8pqr = b \\ &(p^2 + q^2 + r^2)^2 - 4(p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2) = c \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

also auch

$$\left.\begin{aligned} &p^2 + q^2 + r^2 = -\frac{a}{2} \\ &p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = \frac{a^2 - 4c}{16} \\ &p^2q^2r^2 = \frac{b^2}{64} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Mithin können, nach §. 175 Anmerk., die Werthe p^2, q^2 und r^2 wie die Wurzeln einer cubischen Hülfsgleichung

$$z^3 + \frac{a}{2}z^2 + \frac{a^2 - 4c}{16}z - \frac{b^2}{64} = 0 \tag{6}$$

angesehen werden, wo z eine neue Unbekannte bezeichnet. Sind also z, z', z'' die drei Wurzeln dieser cubischen Hülfsgleichung, so kann man, sobald dieselben gefunden sind, setzen

$$p = \sqrt{z}\,,\quad q = \sqrt{z'}\,,\quad r = \sqrt{z''}. \tag{7}$$

Also erhält man endlich

$$x = \sqrt{z} + \sqrt{z'} + \sqrt{z''} \qquad (8)$$

als Ausdruck für die gesuchte Wurzel der gegebenen biquadratischen Gleichung.

Beispiel. Ist die Gleichung gegeben

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$$

so erhält man aus (6) die cubische Hülfsgleichung

$$z^3 + \frac{25}{2}z^2 + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0$$

deren drei Wurzeln nach §. 180, Beispiel 1, sind $\frac{9}{4}$, 4, $\frac{25}{4}$. Also ist

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{4} + \sqrt{\frac{25}{4}}$$

eine Wurzel der gegebenen Gleichung, s. d. folgenden Paragraphen.

§. 187.

Zusatz. Die vorstehende Auflösung liefert sogleich alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, sobald man die doppelten Vorzeichen der Quadratwurzeln beachtet.

Denn in der nöthigen Allgemeinheit hat man statt (7) des vorigen Paragraphen zu setzen

$$p = \pm\sqrt{z}\,,\ q = \pm\sqrt{z'}\,,\ r = \pm\sqrt{z''},$$

folglich statt (8) des vorigen Paragraphen

$$x = \pm\sqrt{z} \pm \sqrt{z'} \pm \sqrt{z''}.$$

Hierin ist die Auswahl unter den doppelten Vorzeichen so zu treffen, daß der Bedingung aus (4) des vorigen Paragraphen, daß das Product pqr das entgegengesetzte Vorzeichen von b haben muß, Genüge geschieht. Man hat also die vier Wurzeln

wenn b positiv ist:	wenn b negativ ist:
$x = +\sqrt{z} + \sqrt{z'} - \sqrt{z''}$	$x = +\sqrt{z} + \sqrt{z'} + \sqrt{z''}$
$x = +\sqrt{z} - \sqrt{z'} + \sqrt{z''}$	$x = +\sqrt{z} - \sqrt{z'} - \sqrt{z''}$
$x = -\sqrt{z} + \sqrt{z'} + \sqrt{z''}$	$x = -\sqrt{z} + \sqrt{z'} - \sqrt{z''}$
$x = -\sqrt{z} - \sqrt{z'} - \sqrt{z''}$	$x = -\sqrt{z} - \sqrt{z'} + \sqrt{z''}.$

Man kann aber auch die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung finden, sobald nur eine einzige Wurzel, z, der cubischen Hülfsgleichung bekannt ist. Denn aus (5) des vorigen Paragraphen folgt

$$q^2 + r^2 = -p^2 - \frac{a}{2}$$

und aus (4) des vorigen Paragraphen

$$2qr = -\frac{b}{4p}$$

folglich ist

$$q^2 + 2qr + r^2 = -p^2 - \frac{a}{2} - \frac{b}{4p}$$

$$q + r = \pm\sqrt{-p^2 - \frac{a}{2} - \frac{b}{4p}}$$

und endlich

$$x = p + q + r$$

$$= p \pm \sqrt{-p^2 - \frac{a}{2} - \frac{b}{4p}}.$$

Setzt man hierin $p = \pm\sqrt{z}$, so kann man die gesuchten vier Wurzeln in die folgenden beiden Ausdrücke zusammenfassen

$$x = +\sqrt{z} \pm \sqrt{-z - \frac{a}{2} - \frac{b}{4\sqrt{z}}}$$

$$\text{und } x = -\sqrt{z} \pm \sqrt{-z - \frac{a}{2} + \frac{b}{4\sqrt{z}}}$$

Beispiel. Die Gleichung des vorigen Paragraphen

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$$

giebt nach der ersten Methode die vier Wurzeln

$$x = +\frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$$

$$x = +\frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$$

$$x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$$

$$x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6$$

und nach der zweiten Methode, wo nur die Wurzel $z = \frac{9}{4}$ der cubischen Hülfsgleichung benutzt wird

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{9}{4} + \frac{25}{2} - 10} = 1 \text{ oder } 2$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{9}{4} + \frac{25}{2} + 10} = 3 \text{ oder } -6.$$

Anmerkung. Die Auflösung der biquadratischen Gleichungen durch Zurückführung derselben auf cubische Gleichungen wurde zuerst von den italienischen Mathematikern Ferrari und Bombelli gefunden. Die vorstehende Methode hat Euler gegeben.

Auflösung der numerischen höheren Gleichungen.

§. 188.

Erklärung. Unter numerischen Gleichungen versteht man solche Gleichungen, deren Coefficienten reelle, mit Ziffern geschriebene Zahlen sind.

Die Auflösung der höheren Gleichungen in allgemeinen Buchstaben-Ausdrücken ist über den vierten Grad hinaus nicht möglich, und selbst für Gleichungen des dritten und vierten Grades kann, wie sich in den vorigen Paragraphen gezeigt hat, die Auflösung in Buchstaben-Ausdrücken eine so umständliche werden, daß es oft wünschenswerth ist, einfachere Methoden zu besitzen. Solche einfachere Methoden lassen sich aber angeben, wenn man sich lediglich auf numerische Gleichungen beschränkt, und es soll davon hier noch soviel mitgetheilt werden, wie für die gewöhnlichen Bedürfnisse der Praxis ausreicht.

Zunächst und hauptsächlich wird es hier nur um die Aufsuchung der reellen Wurzeln sich handeln.

§. 189.

Lehrsatz. Eine Gleichung, deren sämmtliche Coefficienten ganze Zahlen sind, kann nicht einen rationalen Bruch zur Wurzel haben.

Beweis. Es sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

die gegebene Gleichung, deren sämmtliche Coefficienten a_1, a_2, a_3, ... a_n ganze Zahlen sind.

Wollte man nun annehmen, es sei $x = \frac{p}{q}$ eine Wurzel dieser Gleichung, wo p und q als relative Primzahlen vorausgesetzt werden, so würde die Einsetzung in die vorige Gleichung geben

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_n = 0$$

folglich auch

$$\frac{p^n}{q} = - a_1 p^{n-1} - a_2 p^{n-2} q - \ldots - a_n q^{n-1}$$

welche Gleichung einen Widerspruch enthält, da ein eigentlicher Bruch niemals einer ganzen Zahl gleich sein kann.

Anmerkung. Durch die Transformation des §. 180 ist man jederzeit im Stande, eine Gleichung mit gebrochenen Coefficienten in eine solche mit ganzen Coefficienten zu verwandeln. Aus diesem Grunde und mit Rücksicht auf den vorstehenden Lehrsatz braucht in den folgenden Sätzen von der Aufsuchung solcher Wurzeln, welche rationale Brüche sind, nicht ausdrücklich die Rede zu sein.

§. 190.

Lehrsatz. Wenn in dem gegebenen Ausdrucke

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

dessen sämmtliche Coefficienten reell sind, die Substitution irgend zweier reellen Werthe von x Resultate von ungleichen Vorzeichen giebt, so ist zwischen diesen beiden Werthen eine ungerade Anzahl Wurzeln der Gleichung $u = 0$, also mindestens eine enthalten.

Wenn aber die gedachte Substitution Resultate von gleichen Vorzeichen liefert, so kann zwischen den beiden Werthen von x nur eine gerade Anzahl Wurzeln der Gleichung $u = 0$, möglicher Weise aber gar keine enthalten sein.

Beweis. Der gegebene Ausdruck für u kann nach §. 169 jederzeit auch unter der Form dargestellt werden

$$u = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots$$

wo α, β, γ, 2c. die Wurzeln der Gleichung $u = 0$ sind. In dieser Form läßt derselbe folgende Schlüsse zu:

1) Es seien sämmtliche Wurzeln der Gleichung $u = 0$ reell und ungleich, und überdies nach ihrer Größe geordnet, so daß man hat $\alpha > \beta > \gamma >$ 2c.

Substituirt man für x einen Werth, der größer als α ist, so werden sämmtliche Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ 2c. positiv, folglich wird u positiv.

Substituirt man für x einen Werth, der kleiner als α und größer als β ist, so wird $x - \alpha$ negativ, dagegen $x - \beta$, $x - \gamma$ 2c. positiv, folglich u negativ.

Substituirt man für x einen Werth, der kleiner als β und größer als γ ist, so werden $x - \alpha$ und $x - \beta$ negativ, dagegen $x - \gamma$ 2c. positiv, folglich wird wieder u positiv. U. s. w.

Aus dieser Zusammenstellung folgt leicht, wenn man irgend zwei beliebige dieser Substitutionen für x heraushebt, der oben im Lehrsatze ausgesprochene Schluß.

2) Es seien unter den Wurzeln der Gleichung $u = 0$ auch gleiche Wurzeln vorhanden, so daß man hat $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq$ 2c.

In diesem Falle tritt gegen das Obige nur der Unterschied ein, daß wenn z. B. $\beta = \gamma$ ist, es nicht mehr möglich sein wird, einen Zwischenwerth zwischen β und γ für x zu substituiren. Im Uebrigen gilt aber wieder der obige Schluß, sobald man nur (wie nach §. 170 allgemein üblich ist) gleiche Wurzeln eben so oft als Wurzeln zählt, wie der entsprechende Factor des ersten Grades in u vorhanden ist.

3) Es seien unter den Wurzeln der Gleichung $u = 0$ auch imaginäre Wurzeln vorhanden.

Nach §. 172 können imaginäre Wurzeln in der Gleichung $u = 0$ nur paarweise vorkommen, und zwar unter den Formen $p + iq$ und $p - iq$. Die einem solchen Wurzelpaare entsprechenden Factoren des ersten Grades, welche in dem Ausdrucke für u enthalten sind, werden also

$$(x - p - iq)\,(x - p + iq)$$

und das Product derselben, welches sich schreiben läßt

$$(x - p)^2 + q^2$$

ist stets positiv, welchen reellen Werth man auch für x substituiren mag. Daraus folgt, daß etwa vorhandene imaginäre Wurzeln die obigen Schlüsse nicht stören.

Beispiel. Der Ausdruck

$$u = x^3 - 6x - 9$$

giebt für $x = 0$ den Werth $u = -9$, und für $x = 10$ den Werth $u = +931$. Daraus folgt, daß zwischen 0 und 10 mindestens eine Wurzel der Gleichung $u = 0$ enthalten sein muß (siehe das Beispiel §. 181).

Anmerkung. Substituirt man für x die beiden äußersten möglichen Werthe $x = +\infty$ und $x = -\infty$, wobei §. 166 anzuwenden ist, so kann man hier den am Ende des §. 172 gemachten Schluß reproduciren.

§. 191.

Aufgabe. In einer gegebenen numerischen Gleichung die ganzen Wurzeln, wenn sie deren enthält, zu finden und die irrationalen Wurzeln, wenn sie deren enthält, zwischen zwei benachbarte ganze Zahlen einzuschließen.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

in welcher sämmtliche Coefficienten als ganze Zahlen vorausgesetzt werden dürfen. Die linke Seite dieser Gleichung werde, wie bisher, mit u bezeichnet, so daß man hat

$$u = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Wird dieser Ausdruck nach Anleitung der §§. 100 und folg. wie das allgemeine Glied einer arithmetischen Progression der $n$ten Ordnung angesehen, so ergiebt sich das folgende Rechnungsverfahren.

1) Man substituire für x der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, ... n, betrachte die hervorgehenden Werthe von u wie die Glieder einer Progression und bilde deren successive Differenzen Δu, $\Delta^2 u$, 2c. bis zu der constanten Differenz $\Delta^n u$. Diese letztere muß nach §. 102 den Werth annehmen

$$\Delta^n u = 1.2.3\ldots n.$$

2) Man setze die so erhaltene Progression weiter fort, sowohl durch Additionen nach vorwärts für die Indices $n + 1$, $n + 2$, ꝛc., als auch durch Subtractionen nach rückwärts für die negativen Indices -1, -2, ꝛc.

3) Diese Fortsetzung breche man nach vorwärts da ab, wo die Werthe u, Δu, $\Delta^2 u$, ꝛc. sämmtlich positiv sind, und nach rückwärts da, wo diese Werthe abwechselnde Vorzeichen besitzen. Denn man überzeugt sich leicht, daß über diese Grenzen hinaus der Werth $u = 0$ nicht mehr vorkommen kann, die gedachten Grenzen also alle reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung zwischen sich fassen müssen.

4) Ueberall, wo man in der so entstandenen Reihe der Werthe von u erhält $u = 0$, ist der entsprechende Werth von x eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

5) Ueberall, wo in der Reihe der Werthe von u ein Wechsel des Vorzeichens eintritt, liegt zwischen den beiden entsprechenden Werthen von x zum mindesten eine irrationale Wurzel der gegebenen Gleichung.

6) Wenn auf diese Weise nicht alle Wurzeln der gegebenen Gleichung sichtbar werden, so liegen entweder mehrere Wurzeln nahe beisammen zwischen denselben benachbarten ganzen Zahlen, oder es sind gleiche Wurzeln vorhanden, oder die fehlenden Wurzeln sind imaginär.

Die folgenden Beispiele mögen die am häufigsten vorkommenden Fälle erläutern.

Beispiel 1. Es sei gegeben

$$x^3 - 13x - 12 = 0.$$

Substituirt man für x die Werthe 0, 1, 2, 3 und setzt die entstandene Progression darauf nach vorwärts und nach rückwärts weiter fort, so erhält man das folgende Schema:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
-4	-24			
		$+24$		
-3	0		-18	
		$+6$		$+6$
-2	$+6$		-12	
		-6		$+6$
-1	0		-6	
		-12		$+6$
0	-12		0	
		-12		$+6$
$+1$	-24		$+6$	
		-6		$+6$
$+2$	-30		$+12$	
		$+6$		$+6$
$+3$	-24		$+18$	
		$+24$		$+6$
$+4$	0		$+24$	
		$+48$		
$+5$	$+48$			

Dieses Schema ist, soweit es hier geschrieben steht, in sich vollständig. Denn nach der Seite der positiven x sind die Werthe von u, Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ sämmtlich positiv, nämlich

$$+48 \quad +48 \quad +24 \quad +6$$

und nach der Seite der negativen x haben diese Werthe abwechselnde Vorzeichen, nämlich

$$-24 \quad +24 \quad -18 \quad +6,$$

folglich kann über beide Grenzen hinaus der Werth $u=0$ nicht mehr vorkommen. Das Schema muß also alle reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung in sich fassen.

Der bloße Anblick liefert hier sofort die drei ganzen Wurzeln

$$x=-3\,,\quad x=-1\,,\quad x=+4\,,$$

für welche Werthe $u=0$ wird.

Beispiel 2. Es sei gegeben

$$x^3-6x-4=0.$$

Das vorige Verfahren liefert folgendes in sich vollständige Schema:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
-3	-13			
		$+13$		
-2	0		-12	
		$+1$		$+6$
-1	$+1$		-6	
		-5		$+6$
0	-4		0	
		-5		$+6$
$+1$	-9		$+6$	
		$+1$		$+6$
$+2$	-8		$+12$	
		$+13$		
$+3$	$+5$			

Hier hat man eine ganze Wurzel $x = -2$, für welchen Werth $u = 0$ wird. Außerdem ergiebt die Reihe der Werthe von u zwei Zeichenwechsel, durch welche irrationale Wurzeln angezeigt werden; die eine derselben liegt zwischen -1 und 0, die andere zwischen $+2$ und $+3$.

Beispiel 3. Es sei gegeben

$$x^3 - 12x - 16 = 0.$$

Das in sich vollständige Schema wird folgendes:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
-3	-7			
		$+7$		
-2	0		-12	
		-5		$+6$
-1	-5		-6	
		-11		$+6$
0	-16		0	
		-11		$+6$
$+1$	-27		$+6$	
		-5		$+6$
$+2$	-32		$+12$	
		$+7$		$+6$
$+3$	-25		$+18$	
		$+25$		$+6$
$+4$	0		$+24$	
		$+49$		
$+5$	$+49$			

Hier finden sich zunächst die beiden ganzen Wurzeln $x = -2$ und $x = +4$, für welche Werthe $u = 0$ wird. Was die fehlende dritte Wurzel betrifft, so bemerke man, daß die Werthe von u für $x = -3$ und $x = -1$ gleiche Vorzeichen besitzen und deshalb in diesem Intervall nur eine gerade Anzahl Wurzeln enthalten sein kann, und da außerdem die fehlende dritte Wurzel nicht irrational sein kann, so folgt, daß die Gleichung zwei gleiche Wurzeln, jede $= -2$, haben muß.

Beispiel 4. Es sei gegeben

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

Das in sich vollständige Schema, welches alle reellen Wurzeln dieser Gleichung in sich faßt, wird folgendes:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
-2	-5			
		$+1$		
-1	-4		-6	
		-5		$+6$
0	-9		0	
		-5		$+6$
$+1$	-14		$+6$	
		$+1$		$+6$
$+2$	-13		$+12$	
		$+13$		$+6$
$+3$	0		$+18$	
		$+31$		
$+4$	$+31$			

Hier hat man eine ganze Wurzel $x = +3$, für welchen Werth $u = 0$ ist, während andere reelle Wurzeln durch die Reihe der Werthe von u unmittelbar nicht angezeigt werden. Die beiden fehlenden Wurzeln können also, wenn sie reell sind, nur irrational sein und liegen entweder nahe beisammen zwischen denselben benachbarten ganzen Zahlen oder sind gleiche Wurzeln; in beiden Fällen würde man sie zunächst zwischen $x = -2$ und $x = -1$ zu suchen haben und zu dem Zwecke dieses Intervall nach §. 113 weiter interpoliren. Die beiden fehlenden Wurzeln können aber auch imaginär sein, was sich durch das Verfahren des §. 195 entscheiden würde. Es bleibt in Wahl, welchen dieser beiden Wege man zuerst einschlagen will.

Anmerkung. Die vorstehenden Beispiele, von denen die drei letzten schon im §. 183 vorkommen, sind mit Absicht so gewählt, daß sie wenig Raum in Anspruch nehmen, um die Uebersicht nicht zu erschweren; aber das Verfahren bleibt auch in umfangreicheren Aufgaben unverändert dasselbe. Sollten die Coefficienten der gegebenen Gleichung drei- oder mehrzifferige Zahlen sein, so kann es zweckmäßig werden, zuerst für x Werthe wie 0, 10, 20, ... $10n$ zu substituiren, um vorläufig Grenzen der reellen Wurzeln festzustellen, und von da durch Interpolation zu kleineren Intervallen hinabzusteigen.

§. 192.

Aufgabe. In einer gegebenen numerischen Gleichung eine irrationale Wurzel, nachdem dieselbe zwischen zwei benachbarte ganze Zahlen eingeschlossen ist, angenähert zu berechnen.

Auflösung. Diese Aufgabe ist identisch mit demjenigen besonderen Falle der Interpolation, welcher im §. 112 behandelt wurde und unter den vorliegenden Bedingungen sich gestaltet wie folgt.

Es seien h und $h+1$ die beiden ganzen Zahlen, welche die gesuchte Wurzel zwischen sich einschließen. Dann muß man, um mit der Bezeichnung des §. 112 in Uebereinstimmung zu bleiben, unter $h+x$ die gesuchte Wurzel verstehen, so daß x nur denjenigen echten Bruch bezeichnet, welcher zu h addirt die vollständige Wurzel liefert. Außerdem hat man im §. 112 hier $u_x = 0$ zu setzen. Es wird also nach der Gleichung (3) daselbst

$$x = -\frac{u_0}{\Delta u_0 + \frac{x-1}{2}\Delta^2 u_0 + \frac{(x-1)(x-2)}{2\,.\,3}\Delta^3 u_0 + \ldots}$$

welche Auflösung mithin unmittelbar an diejenige des vorigen Paragraphen anknüpft, indem sie die dort bereits entwickelten Differenzen weiter benutzt.

Von dieser Auflösung ist so Gebrauch zu machen, daß man auf der rechten Seite der Gleichung zuerst $x = 1$ als ersten Näherungswerth einsetzt, wodurch der Nenner sich auf sein erstes Glied reducirt. Den so gefundenen Werth von x substituirt man wiederum a

der rechten Seite der Gleichung, den dadurch gefundenen Werth abermals 2c., wodurch man eine Reihe von Werthen erhalten wird, welche dem gesuchten Werthe von x successive näher und näher kommen.

Beispiel. Die Gleichung

$$x^3 - 6x - 4 = 0$$

hat nach dem vorigen Paragraphen eine irrationale Wurzel zwischen $+2$ und $+3$. Um diese zu berechnen, hat man $h = 2$ zu setzen und, mit Rücksicht auf die geänderte Bedeutung von x, aus dem Schema des vorigen Paragraphen Folgendes zu entnehmen:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0	-8			
		$+13$		
1	$+5$		$+18$	
		...		$+6$
2	...		...	
		...		
3	...			

Durch Einsetzung dieser Werthe wird der Ausdruck für x folgender:

$$x = \frac{8}{13 + \frac{x-1}{2} \cdot 18 + \frac{(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} \cdot 6}.$$

Substituirt man hierin auf der rechten Seite zuerst $x = 1$, so erhält man

$$x = \frac{8}{13} = 0{,}6.$$

Substituirt man wieder diesen Werth auf der rechten Seite, so erhält man

$$x = \frac{8}{9{,}96} = 0{,}8$$

durch weitere Substitution dieses Werths

$$x = \frac{8}{11{,}44} = 0{,}7$$

ferner ebenso

$$x = \frac{8}{10{,}69} = 0{,}74$$

desgleichen

$$x = \frac{8}{10{,}9876} = 0{,}73$$

u. s. w.

also bis dahin die gesuchte Wurzel $h + x = 2{,}73$.

Die Annäherung, welche diese Rechnung liefert, ist nur eine äußerst langsame, wie der Augenschein lehrt. Etwas schneller wird man schon zum Ziele kommen, sobald man, wenn z. B. x' und x'' irgend zwei auf einander folgende Näherungswerthe bedeuten, für die nächstfolgende Substitution nicht den letzten Werth x'', sondern einen nach den Umständen gewählten Zwischenwerth von x' und x'' zum Grunde liegt. Man kann aber eine viel schnellere Annäherung erhalten, wenn man von vorn herein die gegebene Progression an der betreffenden Stelle durch die Zahl 10 interpolirt und damit die gesuchte Wurzel zwischen zwei Nachbarwerthe einschließt, welche nur um 0,1 von einander verschieden sind. Der Vergleichung wegen soll auch diese Rechnung hier noch durchgeführt werden.

Wenn man nach §. 113 das Intervall zwischen $x = +2$ und $x = +3$ aus dem Beispiel 2 des vorigen Paragraphen durch die Zahl 10 interpolirt, so erhält man:

x	u	δu	$\delta^2 u$	$\delta^3 u$
2,0	− 8,000			
		0,661		
2,1	− 7,339		0,126	
		0,787		0,006
2,2	− 6,552		0,132	
		0,919		0,006
2,3	− 5,633		0,138	
		1,057		0,006
2,4	− 4,576		0,144	
		1,201		0,006
2,5	− 3,375		0,150	
		1,351		0,006
2,6	− 2,024		0,156	
		1,507		0,006
2,7	− 0,517		0,162	
		1,669		0,006
2,8	+ 1,152		0,168	
		1,837		0,006
2,9	+ 2,989		0,174	
		2,011		
3,0	+ 5,000			

Hiernach liegt die gesuchte Wurzel zwischen 2,7 und 2,8. Setzt man nun diese Wurzel $= 2{,}7 + 0{,}1\,x$, wo x wieder eine andere Bedeutung hat als vorhin, so hat man mit Rücksicht hierauf aus dem vorstehenden Schema Folgendes zu entnehmen:

x	u	δu	$\delta^2 u$	$\delta^3 u$
0	— 0,517			
		1,669		
1	+ 1,152		0,168	
		....		0,006
2	....		....	
		....		
3	....			

und durch Einsetzung dieser Werthe wird, indem jetzt δ für Δ zu nehmen ist, der Ausdruck für x folgender:

$$x = \frac{0{,}517}{1{,}669 + \frac{x-1}{2} \cdot 0{,}168 + \frac{(x-1)(x-2)}{2.3} \cdot 0{,}006}.$$

Substituirt man hierin auf der rechten Seite zuerst $x = 1$, so erhält man

$$x = \frac{0{,}517}{1{,}669} = 0{,}31.$$

Substituirt man wieder diesen Werth auf der rechten Seite, so erhält man

$$x = \frac{0{,}517}{1{,}6122061} = 0{,}3207$$

und durch weitere Substitution dieses Werths

$$x = \frac{0{,}517}{1{,}6130795} = 0{,}320508$$

also ist bis dahin die gesuchte Wurzel $2{,}7 + 0{,}1\,x = 2{,}7320508$, einschließlich der letzten Stelle genau.

Der eigentliche Prüfstein für die Richtigkeit der gefundenen Wurzel besteht darin, daß, wenn man die Näherung um einen Schritt weiter fortsetzt, das nächstfolgende Resultat in eben soviel Decimalstellen, wie man richtig haben will, mit dem schon gefundenen übereinstimmen muß.

Höhere Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 193.

Erklärung. Unter einer höheren Gleichung mit mehreren Unbekannten versteht man eine Gleichung, welche entsteht, indem ein aus Gliedern, welche Producte von Unbekannten enthalten, gebildeter Ausdruck gleich Null gesetzt wird.

Die größte Anzahl unbekannter Factoren, welche in einem Gliede enthalten ist, bestimmt den Grad der Gleichung.

So wird eine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten höchstens die Producte enthalten x^2, xy, y^2; eine Gleichung des dritten Grades mit zwei Unbekannten höchstens die Producte x^3, x^2y, xy^2, y^3; eine Gleichung des zweiten Grades mit drei Unbekannten höchstens die Producte x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2 ꝛc.; wo x, y, z die Unbekannten sind.

Eine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten hat, wenn sie vollständig ist, die Gestalt

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

wo a, b, c, d, e, f gegebene bekannte Zahlen bedeuten. Ebenso in anderen Fällen.

§. 194.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen höheren Gleichungen mit mehreren Unbekannten eine Unbekannte zu eliminiren.

Auflösung. Es bleiben hier dieselben drei Eliminations-Methoden gültig, welche sich im §. 123 der Arithmetik für Gleichungen vom ersten Grade entwickelt finden. Nur muß noch eine nothwendige Ergänzung für den Fall hinzutreten, wo die beiden gegebenen Gleichungen gleichzeitig mehrere Potenzen der zu eliminirenden Unbekannten enthalten und mithin das gewöhnliche Verfahren nur in seltenen Fällen anwendbar ist. Diese Ergänzung ist folgende.

Die beiden gegebenen Gleichungen seien, in Bezug auf die zu eliminirende Unbekannte x geordnet

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots A_{m-1} x + A_m = 0$$
$$B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots B_{n-1} x + B_n = 0$$

wo die Coefficienten A_0, A_1 rc., B_0, B_1 rc. so zu verstehen sind, daß sie nicht nur bekannte Zahlen, sondern auch die außer x noch vorhandenen übrigen Unbekannten in sich enthalten. Ferner sei $m > n$ oder auch $m = n$.

Um aus diesen beiden Gleichungen x zu eliminiren, muß man sich die Aufgabe stellen, die Potenzen von x, von der höchsten angefangen, einzeln eine nach der anderen zu eliminiren. Man muß also zunächst dahin trachten, daß man zwei Gleichungen erhält, welche in Bezug auf x höchstens vom $(m-1)$ten Grade sind. Zu dem Ende multiplicire man 1) die erste Gleichung mit B_0 und die zweite Gleichung mit $A_0 x^{m-n}$ und subtrahire darauf beide Gleichungen. Dann wird das erste Glied verschwinden und man erhält eine Gleichung, welche in Bezug auf x vom $(m-1)$ten Grade ist. Ferner multiplicire man 2) die erste Gleichung mit B_n und die zweite Gleichung mit A_m und subtrahire wieder beide Gleichungen. Dann wird das letzte Glied verschwinden und man erhält eine Gleichung, welche durch x theilbar und mithin, nach der Division durch x, gleichfalls in Bezug auf x vom $(m-1)$ten Grade ist.

Auf die so gefundenen beiden Gleichungen wende man dasselbe Verfahren von neuem an, um zwei Gleichungen herzustellen, welche in Bezug auf x höchstens vom $(m-2)$ten Grade sind u. s. w., bis man zu zwei Gleichungen gelangt, welche nur noch die erste Potenz von x enthalten und auf gewöhnliche Weise behandelt werden können.

Eine Abkürzung läßt dieses Verfahren in dem Falle zu, wo $m > n$ ist. Denn so lange $m-1$, $m-2$ rc. noch nicht kleiner als n geworden sind, hat man nur nöthig, aus den jedesmal vorliegenden beiden Gleichungen eine neue Gleichung durch Elimination abzuleiten, die man sodann mit der zweiten gegebenen Gleichung zusammennimmt, um aus beiden weiter zu eliminiren. Es ist jedoch in der Regel zweckmäßig, dieser Abkürzung sich nicht zu bedienen, weil man so eine größere Auswahl von Gleichungen erhält, aus denen man zur weiteren Elimination die einfachsten herausheben kann.

Beispiel. Es sei x zu eliminiren aus den beiden Gleichungen

$$x^3 y - 3x + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 (y-1) + x - 2 = 0. \qquad (2)$$

Man multiplicire (1) mit $y-1$ und (2) mit xy. Dann folgt durch Subtraction

$$x^2y + x(y-3) - (y-1) = 0. \qquad (3)$$

Man multiplicire (1) mit 2 und (2) mit 1. Dann folgt durch Addition und nachdem man durch x dividirt hat

$$2x^2y + x(y-1) - 5 = 0. \qquad (4)$$

Man multiplicire (3) mit 2 und (4) mit 1. Dann folgt durch Subtraction

$$x(y-5) - (2y-7) = 0. \qquad (5)$$

Man multiplicire (3) mit 5 und (4) mit $y-1$. Dann folgt durch Subtraction und nachdem man durch x dividirt hat

$$xy(2y-7) + y^2 - 7y + 16 = 0. \qquad (6)$$

Man multiplicire endlich (5) mit $y(2y-7)$ und (6) mit $y-5$. Dann folgt durch Subtraction und nachdem man durch 5 dividirt hat

$$y^3 - 8y^2 + 20y - 16 = 0 \qquad (7)$$

welche Gleichung das Resultat der Elimination ist.

Die weitere Auflösung ergiebt sich nach den früheren Regeln. Die Gleichung (7) liefert die drei Wurzeln 2, 2, 4, und substituirt man dieselben für y in (5), so erhält man für x die drei Werthe 1, 1, -1.

Man wird übrigens bemerken, daß in diesem Beispiele die Auflösung einfacher ausgefallen wäre, wenn man aus den Gleichungen (1) und (2) zuerst y eliminirt hätte, da diese Gleichungen in Bezug auf y nur vom ersten Grade sind.

§. 195.

Aufgabe. In einer gegebenen höheren Gleichung mit Einer Unbekannten die imaginären Wurzeln, wenn sie deren enthält, zu finden.

Auflösung. Man substituire für die Unbekannte x in der gegebenen Gleichung den Ausdruck $x + iy$. Alsdann zerfällt die Gleichung in einen reellen und einen rein imaginären Theil, und setzt man jeden derselben für sich gleich Null, so erhält man zwei

Gleichungen mit zwei Unbekannten, von denen man nur die **reellen** Wurzeln zu suchen nöthig hat.

Beispiel. Um die imaginären Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 6x - 9 = 0 \qquad (1)$$

zu finden, substituire man $x + iy$ für x, so daß man erhält

$$(x + iy)^3 - 6(x + iy) - 9 = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung zerfällt durch Trennung des reellen und des rein imaginären Theils in die beiden Gleichungen

$$x^3 - 3xy^2 - 6x - 9 = 0 \qquad (3)$$

$$3x^2y - y^3 - 6y = 0. \qquad (4)$$

Da y nicht $= 0$ sein kann, so darf man die letzte Gleichung durch y dividiren, wodurch man erhält

$$3x^2 - y^2 - 6 = 0. \qquad (5)$$

Die Elimination von y aus (3) und (5) giebt

$$x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{8} = 0 \qquad (6)$$

welche Gleichung die reelle Wurzel $x = -\frac{3}{2}$ hat, deren Einsetzung in (5) liefert $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Die gegebene Gleichung (1) hat also das imaginäre Wurzelpaar

$$-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Wittstein, Theodor, Dr. ph. und Professor. **Kurzer Abriß der Elementar-Mathematik** zum Gebrauch für den Unterricht und bei Repetitionen. 2. Auflage. 1858. 8. geh. 8 Sgr.

— **Drei Vorlesungen zur Einleitung in die Differential- und Integralrechnung.** Gehalten zur Eröffnung der Wintervorlesungen 1850—1851. 8. geh. 7½ Sgr.

— **Das Prismatoid.** Eine Erweiterung der elementaren Stereometrie. Mit eingedruckten Figuren. 1860. 4. geh. 10 Sgr.

— **Neue Behandlung des mathematisch-psychologischen Problems** von der Bewegung einfacher Vorstellungen, welche nach einander in die Seele eintreten. Zugleich als Beitrag zu einer schärferen Begründung der mathematischen Psychologie Herbart's 1845 4. geh. 10 Sgr.

— **Mathematische Statistik** und deren Anwendung auf Nationalökonomie und Versicherungswissenschaft. 1867. 4. geh. 28 Sgr.

— **Kurze Anleitung zum Verständniß der neuen Maße und Gewichte** und Vergleichung derselben mit den hannoverschen Maßen und Gewichten. Zum Gebrauch für Schule und Haus. 2. Aufl. 1870. 8. cart. 2½ Sgr.

Navier, Louis, Mitglied der Akademie &c. **Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.** Mit Zusätzen von Liouville. Deutsch herausgegeben und mit einer Abhandlung der Methode der kleinsten Quadrate begleitet vom Professor Dr. Theodor Wittstein. Zwei Bände. 3. Aufl. 1865. 8. geh. 3½ Thlr.

Dazu als Supplementband:

— **Lehrbuch der höheren Mechanik.** Deutsch bearbeitet von Ludwig Meier. Mit einer Vorrede vom Professor Dr. Theodor Wittstein. 1858. 8. geh. 2 Thlr.



